

1902.

N. 11.

ANNALEN DER PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREY, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. UND E. WIEDEMANN.

VIERTE FOLGE.

BAND 9. HEFT 3.

DER GANZEN REIHE 314. BANDES 3. HEFT.

KURATORIUM:

F. KOHLRAUSCH, M. PLANCK, G. QUINCKE,
W. C. RÖNTGEN, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

UND INSBESONDERE VON

M. PLANCK

HERAUSGEGEBEN VON

PAUL DRUDE.



LEIPZIG, 1902.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIIUS BARTH.

*Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen, von den
Postämtern und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Preis für den in
12 Heften (= 3 Bänden) ausgegebenen Jahrgang 38 M.*

(Ausgegeben am 21. October 1902.)

Inhalt.

	Seite
1. J. Zenneck. Ueber inductiven magnetischen Widerstand . . .	497
2. Herbert Hausrath. Eine Differentialmethode zur Bestimmung kleiner Gefrierpunktsdepressionen . . .	532
3. F. A. Schulze. Ueber das Verhalten einiger Legirungen zum Gesetz von Wiedemann und Franz . . .	555
4. P. Drude. Zur Construction von Teslatransformatoren. Schwingungsdauer und Selbstinduction von Drahtspulen . . .	590
5. P. Drude. Resonanzmethode zur Bestimmung der Periode der oscillatorischen Condensatorentladung . . .	611
6. Max Planck. Ueber die von einem elliptisch schwingenden Ion emittirte und absorbirte Energie . . .	619
7. Max Planck. Ueber die Verteilung der Energie zwischen Aether und Materie . . .	629
8. P. Lenard. Ueber die Elektrizitätsleitung in Flammen . . .	642
9. H. Wommelsdorf. Die Condensatormaschine. Eine neue Anordnung zur Erregung von Influenzelectricität . . .	651
10. W. Wien. Ueber die Natur der positiven Elektronen . . .	660
11. Clemens Schaefer. Ueber den Einfluss der Temperatur auf die Elasticität der Elemente . . .	665
12. Louis Lownds. Ueber das Verhalten des krystallinischen Wismuts im Magnetfeld . . .	677
13. Ludwig Matthiessen. Ueber die Bedingungsbeziehungen der aplanatischen Brechung von Strahlenbündeln in beliebigen krummen Oberflächen . . .	691
14. G. C. Schmidt. Ueber die chemischen Wirkungen der Canalstrahlen . . .	703
15. H. Diesselhorst. Zur ballistischen Methode der Messung von Elektrizitätsmengen . . .	712
16. Th. Erhard. Eine Fehlerquelle bei magnetometrischen Messungen . . .	724
17. O. Lehmann. Berichtigung . . .	727

Manuscripte sind an den Herausgeber, Professor Dr. P. Drude, zu senden. Seine Adresse ist Glessen, Nahrungsberg 8.

Es wird gebeten, die Manuscripte druckfertig einzuliefern und in den Correcturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die Zeichnungen sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuscript selbst einzuzichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuscriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Citate sind am Bande oder unten auf den Seiten des Manuscriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortgeschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl anzuführen.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 Sonderabdrücke jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muss dies bei Rücksendung des ersten Correcturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger Abdruck der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Uebersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaction und Verlagsbuchhandlung gestattet.

te
7

2

5

0

1

9

9

2

1

0

6

7

1

e
n
s
s
s

n
a
z
d
st

du

ei
Q
m
un
sol
un
un

auf
wä

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 9.

1. Ueber inductiven magnetischen Widerstand; von J. Zenneck.

Bei einer Reihe von Erscheinungen aus dem Gebiete der elektromagnetischen Schwingungen kann die Vorstellung des „inductiven magnetischen Widerstandes“ (magnetische Inductanz) sehr gute Dienste leisten, wenn man sich vom Verlauf der Erscheinungen nur qualitativ Rechenschaft geben oder diese Erscheinungen elementar darstellen will.

Zweck des Folgenden ist, die Einführung dieses Begriffes näher zu begründen, den Betrag desselben für einfache Fälle anzugeben und die Brauchbarkeit desselben an einer Anzahl zum grössten Teil bekannter Erscheinungen aus dem Gebiet der langsamen elektromagnetischen Schwingungen (Wechselströme der üblichen Frequenz¹⁾ zu zeigen.

A. Theoretisches.

§ 1. Der schematische Fall.

Man gelangt zu dieser Vorstellung im einfachsten Falle durch folgende Ueberlegung.

Ein linearer magnetischer Kreis sei dadurch gebildet, dass ein lamellirter Eisenring von der Länge l , dem gegen l sehr kleinen Querschnitt q und der constanten magnetischen Permeabilität μ mit einer Spule S_1 bewickelt ist, die N_1 Windungen besitzt und der von aussen der Strom i_1 zugeführt wird. Ausserdem soll der Ring noch von einer zweiten kurzgeschlossenen Spule S_2 umgeben sein, deren Windungszahl N_2 , Gesamtwiderstand w_2 und inducirte Stromstärke i_2 sei. Streuung soll keine vor-

1) Dass der Begriff des inductiven magnetischen Widerstandes sich auf dem Gebiet der schnellen elektromagnetischen Schwingungen bewährt, gedenke ich an anderer Stelle nachzuweisen.

handen sein: alle Kraftlinien von S_1 sollen durch S_2 hindurchgehen und umgekehrt.

Für den magnetischen Inductionsfluss Q in dem magnetischen Kreise gilt dann:

$$(1) \quad Q w_m = \frac{N_1 i_1}{V} + \frac{N_2 i_2}{V},$$

worin

$$(2) \quad w_m = \frac{l}{q \mu}$$

den „Ohm'schen magnetischen Widerstand“ und V eine nur vom Maasssystem abhängige Constante¹⁾ bezeichnet.

i_2 ergibt sich aus

$$(3) \quad i_2 w_2 = - \frac{N_2}{V} \cdot \frac{dQ}{dt}.$$

Setzt man „die äussere magnetomotorische Kraft“²⁾ $N_1 i_1 / V = M$ und führt man die Abkürzung

$$(4) \quad p_m = \frac{N_2^2}{w_2} \cdot \frac{1}{V^2}$$

ein, so geht Gleichung (1) über in

$$(5) \quad Q w_m = M - p_m \frac{dQ}{dt}.$$

Ebenso wie im elektrischen Stromkreis neben der äusseren electromotorischen Kraft noch eine inducirte $= -p(di/dt)$ (p Selbstinductionscoefficient) wirkt, so erhält man auch für den magnetischen Kreis ausser der äusseren magnetomotorischen Kraft noch eine inducirte vom Betrage $= -p_m(dQ/dt)$.³⁾

Im Falle sinusförmiger Erregung ergeben sich natürlich für den magnetischen Kreis genau dieselben Beziehungen

1) Vgl. E. Cohn, Das elektromagnetische Feld, p. 276 ff. Leipzig 1900.

2) Magnetomotorische Kraft = Linienintegral der magnetischen Feldintensität längs des geschlossenen Ringes.

3) Die Vorstellung, dass eine Secundärspule vom Standpunkte des magnetischen Kreises als eine „magnetische Selbstinduction“ betrachtet werden könne, habe ich in der mir zugänglichen Literatur nur in einer Bemerkung von J. A. Fleming anlässlich der Fortpflanzung magnetischer Wellen gefunden (Proc. Roy. Inst. 13. p. 311. 1890/92): „If . . . we throttle a magnetic circuit, such as a laminated iron bar with copper coils closed upon themselves, and place a magnetising coil at one end, the closed conducting circuits hinder the rise of magnetic induction in the bar; in other words, they give it what may be called „magnetic self-induction.“ Vgl. p. 499 Anm. 1.

zwischen magnetischem Inductionsfluss und äusserer magnetomotorischer Kraft, wie für den Wechselstromkreis zwischen Stromstärke und äusserer elektromotorischer Kraft.¹⁾

Ist also M von der Form $M_0 \sin \pi n t$, so wird:

$$Q = \frac{M}{\sqrt{w_m^2 + (\pi n p_m)^2}} \cdot \sin(\pi n t - \delta),$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\pi n p_m}{w_m}.$$

Durch die Secundärspule erhält der Eisenkern ausser seinem Ohm'schen magnetischen Widerstand w_m noch einen inductiven magnetischen Widerstand vom Betrage $\pi n p_m$.

Ist der Querschnitt des Eisenringes zu gross, als dass die Annahme eines linearen magnetischen Kreises noch am Platze wäre, so ändert sich nur Gleichung (2). w_m bleibt aber bei derselben Bewickelungsart ausschliesslich Function der Dimensionen und der Permeabilität des Ringes.

§ 2. Streuung vorhanden.

Die Annahme, dass eine merkbare Streuung nicht vorhanden ist, dass also alle Kraftlinien von S_1 durch S_2 hindurchgehen und umgekehrt, soll aufgegeben werden.

Es ist dann zu unterscheiden, ob trotzdem noch alle Kraftlinien von S_2 im Eisenring und demnach auch durch S_1 hindurch verlaufen, oder ob dies nicht zutrifft.

Im ersten Falle ändert sich an den Beziehungen von § 1 nichts, wenn unter Q der im Eisen verlaufende, beiden Spulen gemeinsame Inductionsfluss verstanden wird.

Liegt aber der zweite Fall vor, verlaufen die Kraftlinien von S_2 nicht alle im Eisenring und damit durch S_1 hindurch, so verliert Gleichung (3) ihre Gültigkeit. Der Selbstinductionscoefficient von S_2 besteht nun aus zwei Theilen. Der erste Teil rührt von solchen Kraftlinien her, die im Eisenring und gleichzeitig durch S_1 hindurch verlaufen, der zweite Teil von

1) Dass man die Gesetze des Wechselstromkreises auf magnetisches Gebiet übertragen könne, ist in Bemerkungen von Ch. Steinmetz (Elektrotechn. Zeitschr. 11. p. 346. 1890) und E. T. Carter (Elektrotechn. Zeitschr. 11. p. 464. 1890) angedeutet.

denjenigen, die nur durch S_2 , nicht auch S_1 hindurchgehen. Der letztere Teil des Selbstinductionscoefficienten möge mit s_2 bezeichnet werden. Dann tritt an Stelle von Gleichung (3)

$$(3a) \quad i_2 w_2 = - \frac{N_2}{V} \cdot \frac{dQ}{dt} - s_2 \frac{di_2}{dt}.$$

Im Falle, dass der erregende Strom i_1 ein sinusförmiger Wechselstrom von der Wechselzahl n ist, kann d/dt durch $i\pi n$ ($i = \sqrt{-1}$) und umgekehrt ersetzt und Gleichung (3a) auf die Form gebracht werden

$$i_2 = - \frac{N_2 \cdot w_2}{w_2^2 + (\pi n s_2)^2} \cdot \frac{1}{V} \cdot \frac{dQ}{dt} - \frac{N_2 \cdot (\pi n)^2 \cdot s_2}{w_2^2 + (\pi n s_2)^2} \cdot \frac{1}{V} \cdot Q.$$

Wird das in Gleichung (1) eingesetzt, so erhält man an Stelle von Gleichung (5)

$$(5a) \quad Q w_m' = M - p_m \frac{dQ}{dt},$$

wo

$$w_m' = w_m + \frac{N_2^2 \cdot (\pi n)^2 \cdot s_2}{w_2^2 + (\pi n s_2)^2} \cdot \frac{1}{V^2},$$

$$p_m = \frac{N_2^2 \cdot w_2}{w_2^2 + (\pi n s_2)^2} \cdot \frac{1}{V^2},$$

d. h. die Wirkung von S_2 auf das magnetische Wechselfeld im Eisenring ist dieselbe, wie wenn der von ihr umschlossene Raum einen inductiven magnetischen Widerstand vom Betrage $\pi n p_m$ erhalten hätte und ausserdem noch sein Ohm'scher magnetischer Widerstand vermehrt worden wäre.

§ 3. Unvollkommen geschlossener Eisenring.

Erhält der Eisenring an der Stelle, an welcher sich S_2 befindet, einen relativ schmalen Schlitz (vgl. Fig. 1), so gelten für die S_1 und S_2 gemeinsamen Kraftlinien noch die Beziehungen von § 2. Nur wird nicht nur w_m , sondern im allgemeinen auch s_2 in diesem Falle für dieselbe Spule einen anderen Wert annehmen als im Falle von § 2. Es gilt aber auch hier: der von S_2 umschlossene Raum verhält sich so, als ob sein Ohm'scher magnetischer Widerstand vergrössert und ausserdem noch ein inductiver magnetischer Widerstand hinzugekommen wäre.

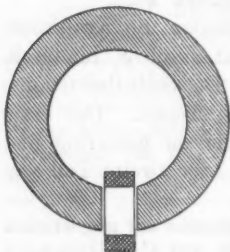


Fig. 1.

§ 4. Spule im beliebigen Wechselfelde.

Durch eine Windung der Spule werde eine Fläche gelegt. Der Inductionsfluss durch dieselbe sei, wenn die Spule offen ist gleich Q_0 , wenn sie kurz geschlossen ist gleich Q . p sei der Selbstinductionscoefficient, w der Widerstand, N die Windungszahl und i der Strom der Spule. Dann gilt mit um so grösserer Annäherung, je geringer die Windungszahl ist und je näher die Windungen bei einander liegen:

$$Q = Q_0 + \frac{pV}{N} \cdot i,$$

$$i w = - \frac{N}{V} \cdot \frac{dQ}{dt},$$

also:

$$Q = Q_0 - p_m \cdot \frac{dQ}{dt},$$

wo

$$p_m = \frac{p}{w}.$$

Bei sinusförmigem Wechselfelde, $Q_0 = Q_{0 \max} \cdot \sin \pi n t$, wird:

$$(6b) \quad \begin{cases} Q = \frac{Q_{0 \max}}{\sqrt{1 + (\pi n p_m)^2}} \cdot \sin(\pi n t - \delta), \\ \operatorname{tg} \delta = \pi n p_m. \end{cases}^{1)}$$

Man denke sich nun die Spule so ins Feld gebracht, dass ihre Axe die Richtung der Kraftlinien an der betreffenden Stelle hat. B_1 und B_2 seien Niveauflächen, welche sich den Endflächen der Spule möglichst genau anschmiegen. S_m sei die magnetische Spannung (das Linienintegral der magnetischen Feldintensität) zwischen B_1 und B_2 , solange die Spule noch offen ist. Dann kann Q_0 durch S_m/w_m ersetzt und unter w_m der magne-



Fig. 2.

1) L. Arons (Wied. Ann 65. p. 590—594. 1898) hat den Fall eines einfachen Leiterkreises im beliebigen magnetischen Wechselfelde in strengerer Weise behandelt. Sein Resultat kann ohne Schwierigkeit auf die hier gegebene Form gebracht werden.

tische Widerstand des Raumes, der durch B_1 und B_2 einerseits, die Wicklungen der Spule andererseits begrenzt wird, verstanden werden. Gleichung (6b) wird dann zu

$$Q = \frac{S_{\text{max.}}}{w_m \sqrt{1 + (\pi n p_m)^2}} \cdot \sin(\pi n t - \delta),$$

$$\operatorname{tg} \delta = \pi n p_m,$$

d. h. für den in der Richtung der Spulenaxe erfolgenden Induktionsfluss — bez. bei schiefer Stellung der Spule für die Componente des Induktionsflusses in der Richtung der Spulenaxe — verhält sich der von der Spule umschlossene Raum so, als ob zu seinem Ohm'schen magnetischen Widerstande noch ein inductiver magnetischer Widerstand vom Betrage $\pi n p_m / w$ hinzugekommen wäre.

§ 5. Dünne Metallröhren.

In allen bisher behandelten Fällen kann, ohne dass sich qualitativ etwas ändert, die Secundärwicklung bez. -spule durch eine Metallröhre ersetzt werden, deren Wandstärke d sehr klein ist gegen ihren Radius r .

In dem Falle von § 1, wenn also der ganze Eisenring mit einer Metallröhre umkleidet ist, wird

$$N_2 = 1, \quad w_2 = \frac{2 \pi r}{d l \lambda}$$

(λ = Leitvermögen der Röhre) und also:

$$(4c) \quad p_m = \frac{d l \lambda}{2 \pi r} \cdot \frac{1}{V^2}.$$

Der inductive magnetische Widerstand $\pi n p_m$ kann auf die Form gebracht werden:

$$\pi n p_m = w_m \cdot d r \frac{\alpha}{2},$$

wenn w_m den Ohm'schen magnetischen Widerstand des Innenraumes der Röhre bei der Anordnung von § 1 bezeichnet und

$$\alpha = \frac{\pi n \lambda \mu}{V^2}$$

gesetzt ist.

Der von der Röhre eingeschlossene Raum repräsentirt für die in der Richtung der Axe hindurchtretenden Kraftlinien einen

inductiven magnetischen Widerstand, der cet. par. der Wandstärke und dem Leitvermögen der Röhre proportional ist.

Die Gleichung (4c) gilt auch dann noch, wenn es sich nicht wie in § 1 um eine zum Ring geschlossene, sondern um eine *unendlich lange geradlinige* Röhre handelt, innerhalb deren die Induction die Richtung der Axe hat. Es gilt demgemäss noch sehr annähernd für die mittleren Partien einer *genügend langen* Röhre. Für Röhren *beliebiger Länge* ist das Resultat noch mit grosser Annäherung zu gebrauchen, wenn dieselben in den Anordnungen von § 2 oder 3 an Stelle der Secundärspule verwendet werden. Für *sehr kurze* Röhrenstücke im beliebigen Wechselfelde liefert die Behandlung von § 4 ebenfalls einen jedenfalls annähernd der Wandstärke und dem Leitvermögen proportionalen inductiven magnetischen Widerstand.

Beispiel: Ein Cylinder aus dünnen Eisendrähten (Permeabilität 1000 mal grösser als diejenige der Luft) von 5 cm Durchmesser ist von einer Messingröhre von 1 mm Wandstärke (Leitvermögen 12 mal grösser als dasjenige von Quecksilber) umschlossen.

Für diesen Fall liefert die obige Formel bei einer Wechselzahl von 100/sec:

$$\pi n p_m = \text{ca. } 126 w_n.$$

§ 6. Dicke Metallröhren.

Wird unter den Voraussetzungen von § 1 die Secundärspule durch eine sehr dicke Metallröhre ersetzt, so treten zwei Aenderungen ein.

a) Die von der elektrischen Strömung in der Röhrenwand erzeugten Magnetkraftlinien verlaufen nur teilweise im Lumen der Röhre, zum Teil auch ausserhalb desselben in der Röhrenwandung. Es wäre deshalb streng genommen das Verfahren von § 2 am Platze, welches abgesehen von einem inductiven noch eine Vermehrung des Ohm'schen magnetischen Widerstandes liefern müsste. Wenn aber das Innere der Röhre, so wie es in § 1 angenommen wurde, sehr viel höhere magnetische Permeabilität besitzt, als die Röhrenwand (wenn also das Innere aus lamellirtem Eisen, die Wand aus Kupfer besteht), so kann von den innerhalb der Röhrenwand verlaufenden Kraftlinien gegenüber denjenigen im Innern abgesehen werden.

b) Die Strömung A an den verschiedenen Punkten des Röhrenquerschnittes ist nicht mehr constant, sondern Function des Abstandes ϱ des betreffenden Punktes von der Röhrenaxe. Es tritt jetzt an Stelle von Gleichung (1)

$$Q w_m = M + \frac{l}{V} \int_r^R A_\varrho d\varrho,$$

wenn r der innere, R der äussere Radius der Röhre ist, und an Stelle von Gleichung (3) § 1

$$\begin{aligned} A_\varrho &= \frac{\lambda}{2\pi\varrho} \cdot E_\varrho \\ &= \frac{-\lambda}{2\pi\varrho} \cdot \frac{1}{V} \frac{dQ}{dt}. \end{aligned}$$

(E_ϱ = elektromotorische Kraft längs eines Kreises vom Radius ϱ , dessen Mittelpunkt auf der Röhrenaxe liegt und dessen Ebene senkrecht dazu ist.)

Das liefert oben eingesetzt:

$$Q w_m = M - p_m \frac{dQ}{dt},$$

wo

$$p_m = \frac{l \cdot \lambda}{2\pi V^2} (\log R - \log r).$$

Demnach der inductive magnetische Widerstand

$$\pi n p_m = w_m \cdot \frac{\alpha}{2} \cdot r^2 (\log R - \log r).$$

Der inductive magnetische Widerstand wächst also um so mehr, je grösser cet. par. die Wandstärke ist, ohne ihr aber wie bei dünnen Röhren proportional zu sein.

Im übrigen gilt das § 5 am Schluss gesagte auch hier, nur genügt für kurze Röhrenstücke im beliebigen Wechselfelde die Behandlung von § 4 nicht mehr.

§ 7. Massiver Metallcylinder.

Wird im Falle von § 1 der Eisenring statt durch lamellirtes durch massives Eisen von kreisförmigem Querschnitt (Radius r)

gebildet, so ergibt sich für die magnetische Feldintensität M_e im Abstand q von der Axe:

$$l M_e = M + \frac{l}{V} \int_e^r A_e d q,$$

$$(1d) \quad \frac{\partial M_e}{\partial q} = - \frac{1}{V} A_e.$$

Ferner ist:

$$E_e = - \frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^q \mu M_e \cdot 2 \pi q d q,$$

$$(3d) \quad \frac{\partial E_e}{\partial q} = - \frac{\mu}{V} \cdot 2 \pi q \cdot \frac{\partial M_e}{\partial t},$$

andererseits aber:

$$E_e = \frac{2 \pi q}{\lambda} \cdot A_e.$$

Setzt man dies in Gleichung (3d) ein und substituirt man für A seinen Wert aus Gleichung (1d), so folgt

$$\frac{\partial^2 M_e}{\partial q^2} + \frac{1}{q} \frac{\partial M_e}{\partial q} - \frac{\lambda \mu}{V^2} \cdot \frac{\partial M}{\partial t} = 0.$$

Man erhält also für die magnetische Feldintensität genau dieselbe Differentialgleichung, die man für die elektrische Feldintensität E in einem von einem variablen Strom durchflossenen Draht bekommt.¹⁾

Die Ausdrücke für den scheinbaren Ohm'schen (w'_m § 2) und den inductiven magnetischen Widerstand ($\pi n p_m$) ergeben sich in ganz analoger Weise wie die entsprechenden elektrischen Widerstände. Sie folgen aus der Gleichung

$$w'_m + i \pi n p_m = \frac{i l \pi n \lambda}{2 \pi V^2} \left[\frac{M_e}{q \frac{\partial M}{\partial q}} \right]_{q=r} \quad 2)$$

1) Vgl. E. Cohn, l. c. p. 356 ff. Dort findet sich auch eine allgemeine Ableitung.

2) Diese Gleichung tritt an Stelle von

$$w' + i v (p' - P) = \frac{i l \mu v}{2 \pi V^2} \left[\frac{E}{q \frac{\partial E}{\partial q}} \right]_{q=r}$$

bei E. Cohn, l. c. p. 364.

Für die angenäherte Ausrechnung sind zwei Fälle zu unterscheiden¹⁾

$$a) \quad r \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \text{ gross gegen } 1.$$

Dann wird um so genauer, je grösser $r \sqrt{\alpha/2}$ ist

$$(7a) \quad w'_m = \pi n p_m = w_m \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \cdot r.$$

Im Bereich der Gültigkeit dieser Formel wird um so genauer, je grösser $r \sqrt{\alpha/2}$ ist, der scheinbare Ohm'sche magnetische Widerstand gleich dem inductiven und demnach die Phasendifferenz zwischen magnetomotorischer Kraft und Feld gleich 45° .

Für Eisen von einer mittleren Permeabilität (1000 mal grösser als diejenige der Luft) und einer mittleren Leitfähigkeit (8 mal grösser als diejenige von Quecksilber) und für die übliche Wechselzahl von 100/sec wird $\alpha = \text{ca. } 336/\text{cm}^2$, $\sqrt{\alpha/2} = \text{ca. } 13/\text{cm}$. Die Formel gilt also unter den gemachten Voraussetzungen für Eisenstäbe, deren Radius wesentlich grösser als ca. 1 mm und geht dann über in

$$w'_m = \pi n p_m = w_m \cdot 6,5 \cdot r.$$

$$b) \quad \beta = r^2 \cdot \frac{\alpha}{4} \text{ kleiner als } 1.$$

Dann wird:

$$(7b) \quad \begin{cases} w'_m = w_m \left(1 + \frac{\beta^2}{12} \dots \right), \\ \pi n p_m = w_m \beta \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta^2}{48} \dots \right). \end{cases}$$

Für Eisen der angegebenen Eigenschaft gelten diese Formeln, wenn $r < 1,1$ mm und werden dann zu

$$w'_m = w_m \left(1 + \frac{84^2}{12} \cdot r^4 \dots \right),$$

$$\pi n p_m = w_m 84 r^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{84^2}{48} \cdot r^4 \dots \right).$$

Mit zunehmendem Radius nimmt der scheinbare Ohm'sche magnetische Widerstand nur sehr langsam, der inductive und damit die Phasendifferenz zwischen magnetomotorischer Kraft und Feld sehr rasch zu.

Beispiel: Eine Spule, deren Axe einen Kreis bildet und deren innerer Radius 5 cm ist, besitze einmal einen massiven

¹⁾ Vgl. E. Cohn, l. c.

Eisenstab als Kern und dann einen solchen aus 1 mm dicken Eisendrähten. Permeabilität, Leitvermögen und Wechselzahl seien die oben angegebenen.

Für den ersten Fall ergeben die Formeln a)

$$w'_m = \pi n p_m = 32,5 \cdot w_m,$$

$$\sqrt{w'^2_m + (\pi n p_m)^2} = \text{ca. } 50 \cdot w_m,$$

$$\delta = 45^\circ,$$

für den zweiten Fall folgt aus den Formeln b)

$$w'_m = 1,004 \cdot w_m,$$

$$\pi n p_m = 0,105 \cdot w_m,$$

$$\sqrt{w'^2_m + (\pi n p_m)^2} = 1,01 \cdot w_m,$$

$$\delta = 5^\circ 58'.$$

Die Amplitude der Induction im Innern der Spule ist bei Wechselstrom im zweiten Falle merklich dieselbe, im ersten Falle ca. 50 mal kleiner als bei Gleichstrom. Ebenso ist die Phasenverschiebung zwischen magnetomotorischer Kraft und Induction im zweiten Falle minimal, während sie sich im ersten 45° nähert. —

Die ganze Behandlung gilt nicht nur für Eisenstäbe oder Drähte, die zum Ring geschlossen sind, sondern auch für gerade Eisencylinder von genügender Länge, wenn die Anordnung so ist, dass bei Gleichstrom in dem Eisencylinder ein der Axe paralleles, homogenes magnetisches Feld entstehen würde.

§ 8. Metallscheibe.

Auf die Gleichungen von § 7 führt ausserdem noch das folgende Beispiel. Es möge in der Anordnung von § 3 der Schlitz statt von einer Spule umgeben, von einer massiven Metallscheibe ausgefüllt sein. Der Radius der Scheibe sei

1) Nimmt man darauf Rücksicht, dass in diesem Falle das Innere der Spule nicht vollkommen mit Eisen ausgefüllt ist, so hat man diesen Wert noch mit ca. 1,1 zu multipliciren.

gleich dem des Eisenringes, die Dicke l , die Permeabilität μ ; l_1 bezeichne die Länge des Eisenkernes, μ_1 dessen Permeabilität (Fig. 3.)

Für $\mathfrak{M} = \mu M$ ergibt das Verfahren von § 7 die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{M}_e}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \mathfrak{M}_e}{\partial \varrho} - \frac{\lambda}{V^2} \cdot \frac{l}{\frac{l}{\mu} + \frac{l_1}{\mu_1}} \cdot \frac{\partial \mathfrak{M}_e}{\partial t} = 0.$$

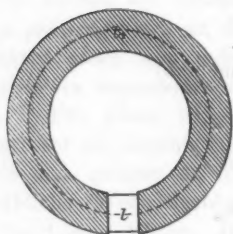


Fig. 3.

Besteht die Scheibe aus einem nicht ferromagnetischen Metalle, ist also μ_1 sehr gross gegen μ , so geht diese Gleichung mit grosser Annäherung über in:

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{M}_e}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \mathfrak{M}_e}{\partial \varrho} - \frac{\lambda \mu}{V^2} \cdot \frac{\partial \mathfrak{M}_e}{\partial t} = 0.$$

Man bekommt also für \mathfrak{M} dieselbe Gleichung wie oben für M . Da ausserdem w'_m und p_m sich in \mathfrak{M} ebenso ausdrücken wie in M — die betreffende Gleichung wird

$$w'_m + i \pi n p_m = \frac{i \lambda \pi n \lambda}{2 \pi V^2} \left[\frac{\mathfrak{M}_e}{\varrho \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial \varrho}} \right]_{\varrho=r},$$

so gelten auch für diesen Fall die Formeln von § 7.

Für Kupfer, dessen Leitvermögen etwa 55 mal grösser als dasjenige von Quecksilber ist und dessen Permeabilität gleich derjenigen der Luft gesetzt werden kann, und für eine Wechselzahl von 100/sec, wird $\sqrt{\alpha/2} = 1,07/\text{cm}$. Für Kupferscheiben also, deren Radius sehr viel grösser als 1 cm ist, kann die Formel a) von § 7 verwandt werden. Sie liefert

$$w'_m = \pi n p_m = w_m \cdot 0,5 \cdot r$$

und für eine Kupferscheibe von 5 cm Radius

$$w'_m = \pi n p_m = 2,5 w_m,$$

$$\sqrt{w_m'^2 + (\pi n p_m)^2} = 3,5 w_m,$$

$$\delta = 45^\circ \text{ approx.},$$

während also der magnetische Widerstand des Schlitzes durch die Füllung mit der Kupferscheibe nur auf seinen $3\frac{1}{2}$ fachen Betrag gebracht wird, hat die Kupferscheibe doch eine beträchtliche Phasenverschiebung zwischen magnetomotorischer Kraft und Induction im Eisenring zur Folge. —

Ist der Radius der Kupferscheibe R grösser als derjenige des Eisenringes r , so kommt zu dem oben berechneten magnetischen Widerstand noch hinzu der inductive magnetische Widerstand des in Fig. 4 schraffirten Theiles der Scheibe. Für diesen darf bei dieser Anordnung der Ausdruck von § 6 benutzt werden. Er liefert für einen äusseren Radius $R = 10 \text{ cm}$:



Fig. 4.

$$\pi n p_m = w_m \cdot \frac{\alpha}{2} \cdot r^2 (\log R - \log r) = 19 w_m.$$

Im ganzen wird also für eine solche Kupferscheibe:

$$w'_m = 2,5 w_m,$$

$$\pi n p_m = (2,5 + 19) w_m = 21,5 w_m,$$

$$\sqrt{w'^2_m + (\pi n p_m)^2} = 21,6 w_m,$$

$$\delta = \text{ca. } 83^\circ 22'.$$

Eine Vermehrung des Radius der Kupferscheibe verursacht also eine ganz erhebliche Steigerung des inductiven magnetischen Widerstandes und damit der Phasendifferenz δ .

§ 9. Resultat.

Geschlossene Spulen, metallene Röhren, Stäbe oder Scheiben verhalten sich im magnetischen Wechselfelde gegenüber der magnetischen Induction in der Richtung ihrer Axe so, als ob ihr magnetischer Widerstand erhöht worden wäre. Diese scheinbare Erhöhung des magnetischen Widerstandes besteht bei kurz geschlossenen Spulen und Metallröhren vorwiegend darin, dass zu dem Ohm'schen magnetischen Widerstand, wie er durch Dimensionen und Permeabilität bestimmt ist, noch ein inductiver magnetischer Widerstand hinzutritt. Bei massiven metallenen Stäben oder Scheiben erfährt ausserdem noch der Ohm'sche magnetische Widerstand eine scheinbare Vermehrung.

Der Betrag des scheinbaren magnetischen Widerstandes (des Ohm'schen und inductiven) kann bei einfachen Anordnungen exact oder angenähert aus geometrischen Dimensionen, Leitvermögen und Permeabilität berechnet werden. Ist er berechnet, so kann damit ebenso bequem operirt werden, wie

etwa mit dem Ohm'schen und scheinbaren elektrischen Widerstand einer Drosselspule.

Für eine elementare Darstellung ist wesentlich, dass dieses Resultat — und zwar nicht nur für die oben beschriebenen speciellen Anordnungen, sondern für ein beliebiges Wechsel-feld — qualitativ schon aus den Ergebnissen der §§ 1 u. 2 folgt, diese selbst aber sich *ohne Rechnung mit Hülfe von Vector-diagrammen ableiten lassen*. Für die Anwendungen in den folgenden Paragraphen bilden also die Berechnungen der §§ 4 bis 8 keine notwendige Voraussetzung.

B. Anwendung.

§ 10. Inductionsfluss und Streuung im Transformator.

Der in § 1 besprochene Fall ist im wesentlichen realisiert durch einen Transformator, dessen Secundärspule durch einen inductionslosen Widerstand geschlossen ist. Eine inductive Belastung der Secundärspule liefert die § 2 vorausgesetzten Verhältnisse. Gleichgültig, welcher Art die Belastung ist, jedenfalls repräsentirt im magnetischen Kreis des Transformators der von der belasteten Secundärspule umgebene Teil einen höheren magnetischen Widerstand als ihm seinen Dimensionen und seiner Permeabilität nach zukommen würde, und zwar einen um so höheren, je höher cet. par. diese Belastung der Secundärspule ist. Diese Vorstellung ergibt aber:

a) Da der Inductionsfluss im Transformator gleich der magnetomotorischen Kraft durch den magnetischen Widerstand ist, so muss durch Belastung der Secundärspule bei gleichbleibender magnetomotorischer Kraft der Inductionsfluss vermindert werden.

b) Da die Anzahl der im Eisenkern verlaufenden Kraftlinien zu der Zahl der in die Luft gestreuten Kraftlinien sich umgekehrt verhält wie der magnetische Widerstand des Eisenkernes zum magnetischen Widerstand des Streufeldes, so folgt¹⁾:

1) Wenn vorausgesetzt werden darf, dass die Richtung der Kraftlinien in Luft und damit der magnetische Widerstand des Streufeldes wenigstens annähernd davon unabhängig ist, ob die Secundärspule belastet ist oder nicht.

die magnetische Streuung des Transformators ist um so grösser, je höher cet. par. die Belastung der Secundärspule ist.¹⁾

Man erhält damit eine einfache Erklärung für zwei wohl bekannte Erscheinungen. Sie lassen sich mit einfachen Mitteln in folgender Weise demonstrieren.

Auf einem Eisenring aus dünnen Eisendrähten befindet sich ausser einer Primärspule S_1 und einer Secundärspule S_2 eine dritte verschiebbare Spule S_3 , die an ein Hitzdrahtvoltmeter angeschlossen ist. Die Angabe des Voltmeters giebt dann ein Maass für die magnetische Induction an der Stelle des Eisenringes, an welcher sich S_3 befindet.

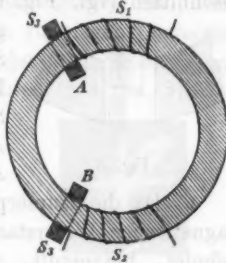


Fig. 5.

Ich erhielt bei meiner Anordnung:

	I	II
	S_3 bei A	S_3 bei B
S_2 offen	114 Volt	102 Volt
S_2 mit 0,06 Ω geschlossen	90 „	70 „
S_2 kurz geschlossen . .	71 „	8 „

Columnne I zeigt die Abnahme der Induction, das Verhältnis von Columnne II zu Columnne I die Zunahme der Streuung mit steigender Belastung der Secundärspule.

§ 11. „Schirmwirkung.“

Der hohe Widerstand, den der Innenraum von Spulen oder Metallplatten aus nicht ferromagnetischem Material für die Kraftlinien des magnetischen Wechselfeldes besitzt, wird gewöhnlich als „Schirmwirkung“ bezeichnet. Dass diese Bezeichnung die Wirkung der Spulen oder Metallplatten bei weitem weniger vollständig charakterisirt als die oben entwickelte Vorstellung, geht wohl am besten aus folgendem einfachen Beispiel hervor.

1) Vgl. z. B. G. Kapp, Transformatoren für Wechselstrom und Drehstrom p. 3 ff. 1900.

Ein Ring aus feinen Eisendrähten, der eine mit Wechselstrom beschickte Wickelung trägt, ist an einer Stelle aufgeschnitten (vgl. Fig. 6). In dem Schlitz befinden sich in

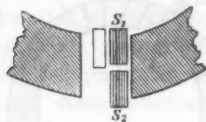


Fig. 6.

genau symmetrischer Stellung zwei gleiche Spulen S_1 und S_2 . Vor S_1 kann eine Kupferplatte ¹⁾ oder eine kurzgeschlossene Spule ²⁾ geschoben werden. Für diese Anordnung liefert die oben entwickelte Anschauung folgendes.

a) Da die Kupferplatte oder Spule eine Vermehrung des magnetischen Widerstandes an der Stelle, an welcher sie sich befindet, hervorruft, so muss der Induktionsfluss durch S_1 *geschwächt* werden, wenn vor S_1 die Kupferplatte oder kurzgeschlossene Spule geschoben wird.

Dem entspricht der Versuch: ein an S_1 angeschaltetes Hitzdrahtvoltmeter zeigte, ehe die Platte oder Spule vor S_1 war, 36, nachdem die Spule vor S_1 geschoben war 29, und als die Platte vor S_1 stand 17 Sct.

b) Da der Induktionsfluss durch S_2 zu dem durch S_1 sich umgekehrt verhält wie der magnetische Widerstand, dem die Kraftlinien auf dem Wege durch S_2 , zu dem magnetischen Widerstand, dem sie auf dem Wege durch S_1 begegnen, so muss eine vor S_1 geschobene Spule oder Metallplatte eine *Vermehrung des Induktionsflusses durch S_2* zur Folge haben, vorausgesetzt, dass der gesamte Induktionsfluss im Eisenring constant gehalten wird.

Auch dies bestätigt der Versuch. Das jetzt an S_2 angeschlossene Hitzdrahtvoltmeter zeigt, ehe Platte oder Spule vor S_1 steht, 36, wenn die Spule vor S_1 ist, 37, und wenn die Platte sich vor S_1 befindet, 39 Sct. Dass diese Zahlen quantitativ mit denen von a) nicht übereinstimmen, kann nicht auffallen, wenn man bedenkt, dass es sich bei dieser Anordnung keineswegs nur um eine einfache Verzweigung des Induktionsflusses zwischen S_1 und S_2 handelt.

c) Da der magnetische Widerstand der Spule und Platte jedenfalls zum Teil inductiv ist, so muss der Induktionsfluss

1) Dicke gleich 35 mm.

2) Fünf parallele Ringe aus Kupferdraht von 5 mm Durchmesser. Radius der Ringe gleich 4,5 cm.

durch S_1 gegen den durch S_2 in der Phase verschoben sein, wenn vor S_1 die Platte oder Spule steht. Die Phasenverschiebung muss relativ zur Schwächung der Amplitude grösser sein, wenn die Spule sich vor S_1 befindet, da diese vorwiegend *inductiven* magnetischen Widerstand besitzt, ohne den Ohm'schen magnetischen Widerstand merklich zu vermehren (§ 4 bez. 9).



Fig. 7.



Fig. 8.



Fig. 9.

Auch das lässt sich leicht nachweisen. Man schliesst an S_1 und S_2 je ein Paar gleicher Spulen an. Die gemeinsame Axe des einen Paares bildet mit derjenigen des anderen einen rechten Winkel. Zwischen beide Spulenpaare wird eine Braun'sche Röhre — Axe der Röhre senkrecht zu den Axen der *beiden* Spulenpaare — gebracht. Man erhält auf dem Schirm der Röhre Fig. 7, Strom in S_1 und S_2 gleichphasig, wenn weder Metallplatte noch Spule vor S_1 steht; Fig. 8, geringe Phasenverschiebung¹⁾, wenn die Metallplatte, Fig. 9, grössere Phasenverschiebung, wenn die kurzgeschlossene Spule sich vor S_1 befindet.

Die oben entwickelte Vorstellung giebt also von den hier in Betracht kommenden Verhältnissen so vollständig als nur möglich Rechenschaft. Die Vorstellung der „Schirmwirkung“ hätte nur die unter a) besprochene Erscheinung geliefert.

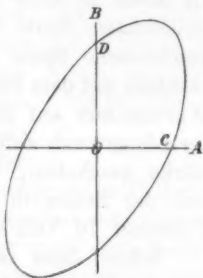


Fig. 10.

1) Erhält man auf dem Schirm der Braun'schen Röhre als Resultante zweier zu einander senkrechten Schwingungen mit den Amplituden OA und OB (vgl. Fig. 10) eine Ellipse, welche die Strecke OA in C , OB in D schneidet, so ergibt sich der Phasenwinkel φ zwischen beiden Schwingungen aus der Beziehung

$$\sin \varphi = \frac{OC}{OA} = \frac{OD}{OB}.$$

§ 12. Verminderung der Streuung durch Kupferplatten.

Von der Eigenschaft der nicht ferromagnetischen Metallplatten, den senkrecht zu ihrer Oberfläche auftreffenden Kraftlinien eines magnetischen Wechselfeldes einen bedeutend höheren Widerstand entgegenzusetzen als die Luft, kann zweckmässig Gebrauch gemacht werden, wenn es sich darum handelt, *die Streuung eines Eisenkörpers, in dem ein magnetisches Wechselfeld vorhanden ist, möglichst herabzudrücken.*

Man braucht den Eisenkörper nur in geeigneter Weise mit Kupferplatten zu umgeben: die Kraftlinien, die beim Austritt aus dem Eisenkörper einen sehr hohen Widerstand finden würden, drängen sich bei weitem mehr im Eisen zusammen, als wenn dasselbe von Luft oder einem anderen Isolator umgeben wäre.

Ein Versuch lieferte folgendes. Ein Cylinder von 5 cm Durchmesser, gebildet aus 0,4 mm-Eisendrähten, befand sich als Kern in einer mit Wechselstrom von 100 Wechseln/sec beschickten Spule S_1 . Eine zweite, an ein Voltmeter angeschlossene Spule S_2 befand sich, 25 cm von S_1 entfernt, ebenfalls auf dem Eisencylinder. Das Voltmeter zeigte 61 Volt. Wurden nun auf den Eisencylinder zwischen S_1 und S_2 zwei der Länge nach aufgeschlitzte Kupferröhren von 2,3 mm Wandstärke geschoben, während der Abstand der beiden Spulen und der Strom in S_1 constant gehalten wurde, so gab das Voltmeter 76 Volt an.

Schon diese relativ dünnen Kupferplatten verminderten also die Streuung derart, dass die Induction im Eisencylinder an der Stelle von S_2 um ca. 25 Proc. höher wurde.

§ 13. Induction in massiven Eisencylindern. „Skineffect.“¹⁾

Analog den Verhältnissen bei elektrischen Stromkreisen²⁾, die von einem Wechselstrom durchflossen sind, ergeben die Gleichungen von § 7 für massive Eisencylinder, in denen

1) Vgl. G. Ferraris, Wissenschaftliche Grundlagen der Elektrotechnik p. 289. Leipzig 1901.

2) Vgl. E. Cohn, l. c. p. 357 ff.

ein sinusförmiger magnetischer Inductionsfluss stattfindet, das folgende:

a) Die Amplitude der magnetischen Induction ist nicht gleichförmig auf dem ganzen Querschnitt, nimmt vielmehr von der Oberfläche nach dem Innern continuirlich ab.

b) Die Phase der Induction ist in den einzelnen Punkten des Querschnittes nicht mehr dieselbe, sondern eine Function des Abstandes von der Axe.

Beide Erscheinungen ergeben sich qualitativ aus den oben entwickelten Anschauungen.

a) Man denke sich aus dem Eisenstab (Radius r) einen Cylinder vom Radius ϱ_1 herausgeschnitten. Dieser Cylinder ist dann von einer metallischen Röhre von der Dicke $r - \varrho_1$ umgeben. Sein Innenraum besitzt also ausser seinem normalen magnetischen Widerstand noch einen scheinbaren, theils inductiven, theils Ohm'schen. Für den Innenraum eines Cylinders mit dem Radius ϱ_2 ($\varrho_2 < \varrho_1$) gilt dasselbe. Aber sein scheinbarer magnetischer Widerstand rührt nicht nur her von der Röhre mit der Wandstärke $r - \varrho_1$, sondern dazu kommt noch der scheinbare magnetische Widerstand der Röhre mit der Dicke $\varrho_1 - \varrho_2$. Der scheinbare magnetische Widerstand ist also grösser im Cylinder vom Radius ϱ_2 als im Cylinder vom Radius ϱ_1 . Daraus folgt aber: der scheinbare magnetische Widerstand (magnetische Impedanz) nimmt nach dem Innern des Eisenstabes stetig zu, die Amplitude der Induction muss also bei derselben äusseren magnetomotorischen Kraft stetig abnehmen.¹⁾



Fig. 11.

b) Da der scheinbare magnetische Widerstand im Innern des Eisencylinders jedenfalls zum Teil inductiv ist, und zwar je nach dem Abstand von der Axe verschieden gross, so muss die Induction im Innern gegenüber derjenigen an der Oberfläche eine vom Radius ϱ abhängige Phasenverschiebung zeigen.

1) Daraus folgt auch qualitativ die § 7 besprochene Erscheinung, dass ein massiver Eisenstab im ganzen für ein magnetisches Wechselfeld in der Richtung seiner Axe einen höheren magnetischen Widerstand repräsentirt als für ein stationäres magnetisches Feld.

Ein einfacher Demonstrationsversuch, der diese Verhältnisse illustriert, ist der folgende. Auf eine Eisenröhre¹⁾ ist eine von einem Wechselstrom durchflossene Spule gesteckt. Eine zweite, ebenfalls auf der Röhre befindliche Spule ist mit einem Voltmeter verbunden; die Angabe des Voltmeters liefert dann ein Maass für die gesamte Induction an der betreffenden Stelle der Eisenröhre. Wird nun in die Eisenröhre ein in dieselbe passender Eisenkern geschoben, so ändert sich die Angabe des Voltmeters nicht merklich: fast der ganze Inductionsfluss verläuft in den äussersten Schichten der Eisenröhre; im Innern ist die Induction praktisch Null, gleichgültig ob sich dort Eisen oder Luft befindet.

Directer lässt sich das noch zeigen, wenn man den Kern mit einer Lage dünnen Kupferdrahtes bewickelt und in die Eisenröhre hineinbringt. Schliesst man die Enden dieses Drahtes an ein Voltmeter an, so erhält man auch dann, wenn das Voltmeter ohne Vorschaltwiderstand gebraucht wird, keinen merkbaren Ausschlag²⁾, während unter denselben Umständen eine Spannung von 30 Volt auftrat, sobald die Eisenröhre entfernt wurde, sodass die magnetischen Kraftlinien nun in der Oberflächenschicht des Eisenkernes verliefen.

§ 14. Fortpflanzung magnetischer Wellen in Eisencylindern.³⁾

Für die Fortpflanzung elektrischer Wellen längs Drähten liefert eine einfache, an den Kirchhoff'schen Ansatz⁴⁾ sich anschliessende Ueberlegung das Resultat, dass die „Fortpflanzungsgeschwindigkeit“ *cet. par.* um so kleiner sein muss, je grösser der Selbstinductionscoefficient pro Längeneinheit ist. Dieselbe Ueberlegung auf die Fortpflanzung der magnetischen Induction in Eisencylindern übertragen⁵⁾ führt dort zu dem

1) Bei meinen Versuchen: äusserer Durchmesser gleich 4,8 cm, Wandstärke gleich 0,4 cm. Wechselzahl 100/sec.

2) Präcisions-Hitzdrahtvoltmeter von Hartmann & Braun: ohne Vorschaltwiderstand 1 Set. = 0,1 Volt.

3) Nähere Angaben über diese Erscheinung z. B. bei A. Oberbeck, Habilitationsschrift, Halle 1878; Wied. Ann. 21. p. 672—697. 1884; Wied. Ann. 22. p. 73—84. 1884; E. T. Trouton, Nature 45. p. 42—43. 1891.

4) Vgl. G. Kirchhoff, Ges. Abhandl. p. 131.

5) Vgl. J. A. Fleming, l. c.

Ergebnis, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit um so kleiner sein muss, je grösser *cet. par.* die in § 1 als magnetischer Selbstinductionscoefficient p_m definirte Grösse (pro Längeneinheit) ist.¹⁾

Wird also ein Eisencylinder aus dünnen Eisendrähten gebildet, so muss nach § 7 die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der magnetischen Wellen eine relativ grosse sein. Sie muss nach § 5 bez. 9 kleiner werden, wenn derselbe Eisencylinder mit einer Metallröhre umgeben wird und zwar um so mehr, je grösser *cet. par.* die Wandstärke der Röhre ist. Sie muss nach § 7 relativ klein sein, wenn der Cylinder aus massivem hergestellt wird.

Zur Demonstration dieser Erscheinung empfiehlt sich folgende Anordnung.²⁾ Auf dem Eisencylinder, innerhalb dessen die magnetischen Wellen erzeugt werden sollen, befindet sich eine mit Wechselstrom beschickte Spule S_1 . Eine zweite, ebenfalls den Eisencylinder umschliessende Spule S_2 kann auf demselben verschoben werden. In Serie mit S_1 geschaltet sind zwei Spulen mit gemeinsamer verticaler Axe, zwischen denen sich eine Braun'sche Röhre — Axe horizontal — befindet. Der in S_2 inducirte Wechselstrom wird durch zwei horizontale

1) Für den elektrischen Strom i in einem linearen Leiter parallel der Axe (X-Richtung) erhält man die Differentialgleichung:

$$c p \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + c w \frac{\partial i}{\partial t} + \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = 0,$$

wenn c , p , w Capacität, Selbstinductionscoefficient und Widerstand pro Längeneinheit bezeichnet.

Für den magnetischen Inductionsfluss Q folgt aus analogen Annahmen:

$$c_m p_m \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} + c_m w_m \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = 0,$$

worin w_m bez. p_m den magnetischen Widerstand bez. Selbstinductionscoefficienten pro Längeneinheit und c_m eine der elektrischen Capacität pro Längeneinheit entsprechende Grösse bedeutet, welche aber nicht mit der von C. Grawinkel u. R. Strecker (Elektrotechn. Zeitschr. 12. p. 437. 1891) statt „magnetischen Widerstand“ vorgeschlagenen „magnetischen Capacität“ zu verwechseln ist.

2) Eine etwas andere Anordnung für denselben Zweck vgl. bei F. Braun, Wied. Ann. 60. p. 552–559. 1897.

Spulen — Axe derselben senkrecht zur Axe der Braun'schen Röhre — geschickt. Das Bild auf dem Schirm der Braun'schen Röhre liefert dann ein relatives Maass für Amplitude

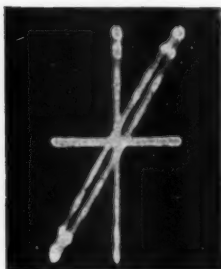


Fig. 12.

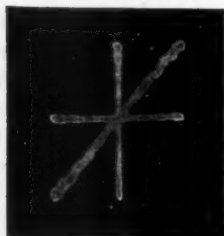


Fig. 13.

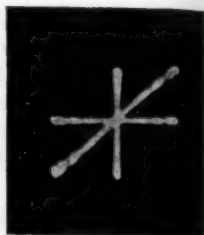


Fig. 14.

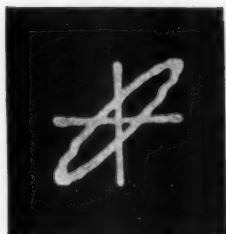


Fig. 15.

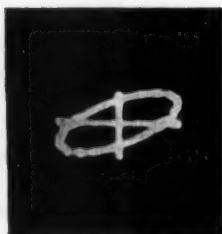


Fig. 16.



Fig. 17.

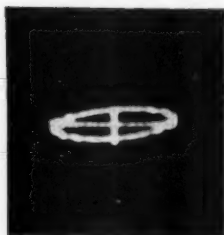


Fig. 18.



Fig. 19.



Fig. 20.

und Phase des in S_2 inducirten Wechselstromes und damit der magnetischen Induction im Eisencylinder an der Stelle, an welcher sich S_2 befindet. Ein Vergleich der Amplitude

und Phase an verschiedenen Stellen erlaubt ein Urteil über Dämpfung und Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen.

Ich erhielt bei derartigen Versuchen:

	S_2 unmittelbar bei S_1	S_2 12,5 cm von S_1	S_2 25 cm von S_1
I. Eisencylinder von 5 cm Durchmesser aus 0,4 mm-Eisendrähten	Fig. 12	Fig. 13	Fig. 14
II. Eisencylind. ebenso, mit Messingröhre von 0,55 mm Wandstärke umgeben	Fig. 12	Fig. 15	Fig. 16
III. Eisencylind. ebenso, mit Messingröhre von 1 mm Wandstärke umgeben	Fig. 12	Fig. 17	Fig. 18
IV. Massiver Eisencylinder bez. Eisendröhre von 4,8 cm äusserem Durchmesser	Fig. 12	Fig. 19	Fig. 20 ¹⁾

Ein Vergleich der Figuren von Reihe I zeigt, dass die Induction im Abstand von 12,5 und 25 cm nur sehr wenig in der Phase gegenüber der Induction in unmittelbarer Nähe von S_1 verschoben, dass also die Fortpflanzungsgeschwindigkeit eine relativ grosse ist. Aus den Figuren der Reihe II, III u. IV folgt eine ziemlich beträchtliche mit der Entfernung von S_1 wachsende Phasenverschiebung der Induction und demnach eine relativ geringe Fortpflanzungsgeschwindigkeit der magnetischen Welle. Ein Vergleich der Figuren der II. mit denjenigen der III. Reihe beweist, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit um so kleiner wird, je grösser der magnetische Selbstinductionscoefficient²⁾, in diesem Falle je grösser die Wandstärke der Röhre ist.

Die Versuche bestätigen also alles, was sich aus dem Begriff der magnetischen Selbstinduction voraussagen liess.

§ 15. Erzeugung eines Drehfeldes durch schief gestellte Spulen.

Wird in ein homogenes magnetisches Wechselfeld eine kurz geschlossene Spule so hineingebracht, dass die Ebene

1) Die Deformation der Ellipsen rührt zum Teil von Oberschwingungen des Wechselstromes (vgl. J. Zenneck, Wied. Ann. 69. p. 854 bis 857. 1899), zum Teil von der Hysteresis des Eisens her.

2) Es verhält sich der magnetische Selbstinductionscoefficient in Reihe I zu dem in Reihe II und dem in Reihe III approx wie 0,017 : 69 : 126.

der Windungen einen schiefen Winkel mit den Kraftlinien des Feldes bildet, so entsteht im Innern der Spule ein Drehfeld.

Die Entstehung eines solchen ergibt sich aus dem Begriff des inductiven magnetischen Widerstandes unmittelbar.

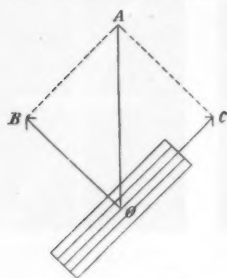


Fig. 21.

Man denke sich das magnetische Wechselfeld, dessen Richtung und Amplitude, ehe die Spule hineingebracht wurde, durch den Vector OA dargestellt sein soll, zerlegt in ein Feld OB in der Richtung der Spulenaxe und in ein Feld OC senkrecht dazu. Für das erstere Feld besitzt die Spule einen gewissen inductiven magnetischen Widerstand (vgl. § 4). Die Komponente OB wird also — abgesehen von einer Verringerung der Amplitude — in der Phase verschoben; die Komponente OC dagegen bleibt ungeändert. Die Resultante der beiden Komponenten muss

jetzt ein — allerdings im allgemeinen nicht kreisförmiges — Drehfeld sein.

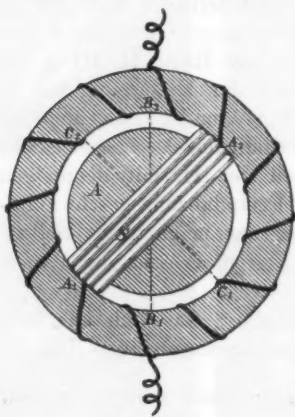


Fig. 22.

Ein *Einphasenmotor*, den ich nach diesem Princip für Demonstrationszwecke anfertigen liess, bestätigt dessen Richtigkeit vollkommen. Fig. 22. ist eine schematische Abbildung desselben. Be findet sich die Spule S in der Lage $B_1 - B_2$, also in der Richtung des Wechselfeldes, so findet eine Rotation des Kurzschlussankers A nicht statt. Bei der Stellung der Spule $C_1 - C_2$ erfolgt die Rotation des Ankers in entgegengesetzter Richtung als in der Stellung $A_1 - A_2$. Man kann also durch einfaches Verstellen der Spule Tourenzahl und Umdrehungsrichtung reguliren und dabei doch einen *Kurzschlussanker* benutzen. Ob sich auf diese Weise ein genügender Nutzeffect erreichen lässt, liess sich nach dem Modell nicht-

beurteilen, da bei dessen Construction der einzige Gesichtspunkt möglichst einfache Herstellung war.

§ 16. Mechanische Kräfte.

Nimmt man nur auf die Amplitude, nicht auf die Phase der Induction Rücksicht, so kann das Resultat von § 9 auch so ausgesprochen werden: in einem magnetischen Wechselfelde verhalten sich geschlossene Spulen, Metallröhren, Metallstäbe und Metallscheiben für die Induction in der Richtung ihrer Axe so, als ob die magnetische Permeabilität im Innern derselben verkleinert wäre. Für solche Spulen, Metallröhren etc., deren Innenraum nicht durch ferromagnetisches Material ausgefüllt ist, heisst dies aber: *sie verhalten sich im magnetischen Wechselfelde qualitativ so, als ob ihr Innenraum diamagnetisch wäre.*

Dem entsprechen auch in vieler Beziehung die mechanischen Kräfte, denen bewegliche Spulen, Röhren etc. im magnetischen Wechselfelde ausgesetzt sind.

a) Während ein Eisenstab, der an einem Waagebalken vertical aufgehängt ist und in eine Spule hineinragt, in das Innere der Spule hineingezogen wird, wenn in der Spule ein elektrischer Strom fliesst, wird eine entsprechend angebrachte Kupferröhre aus dem Innern der Spule herausgestossen, wenn Wechselstrom durch die Spule geschickt wird.

b) Eine längliche kurzgeschlossene Spule stellt sich wie ein diamagnetisches Stäbchen zwischen den Polen eines von Wechselstrom gespeisten Elektromagneten mit der Axe senkrecht zu den Kraftlinien ein.

Ebenso verhalten sich in vielen der bekannten Versuche von Elihu Thomson¹⁾ jene Körper so, als ob ihr Innenraum aus diamagnetischer Substanz bestehen würde.

Die Analogie zwischen dem Verhalten jener Körper und demjenigen von diamagnetischen Körpern gilt aber keineswegs allgemein.

Strassburg i. E., Physik. Institut.

1) Vgl. E. Thomson, „novel phenomena of alternating currents.“ El. world (N. Y.) 28. Mai 1887; vgl. auch J. A. Fleming, l. c.

(Eingegangen 16. Juli 1902.)

2. Eine Differentialmethode zur Bestimmung kleiner Gefrierpunktsdepressionen; von Herbert Hausrath.

(Auszug aus der Göttinger Dissertation.)

In neuester Zeit ist die Frage, wie das Leitvermögen und die Gefrierpunktsdepressionen starker Elektrolyte vom Standpunkte der Dissociationstheorie miteinander und mit der Gültigkeit des Massenwirkungsgesetzes in Einklang gebracht werden kann, vielfach discutirt worden. Die Lösung dieser Fragen und vieler anderer, welche die Constitution gelöster Stoffe betreffen, ist um so schwieriger, als die *Gefriermethode*, welche zur Bestimmung der Dissociation am einwandfreiesten erscheint, nur bei so hohen Concentrationen zuverlässige Resultate liefert, wo die Gültigkeit der Gasgesetze schon zweifelhaft ist.¹⁾

Wie sehr die Resultate der verschiedenen Experimentatoren bis vor kurzer Zeit differirten, zeigt eine von van't Hoff²⁾ gegebene Tabelle der mit Rohrzuckerlösungen erhaltenen Moleculardepressionen des Wassers:

1885 Raoult	18,5 (1 Proc.)
1886 Raoult	25,9 (grosse Verdünnung)
1888 Arrhenius	20,4 ($1\frac{1}{2}$ Proc.)
1893 Loomis	17,1 ($\frac{1}{4}$ Proc.)
1893 Jones	23,7 (0,08 Proc.)
1894 Ponsot	18,77 (unendl. Verdünnung)
1896 Abbeg	18,6 (unendl. Verdünnung)
1897 Wildermann	18,7 (0,17 Proc.)
1897 Raoult	18,72 (grosse Verdünnung)

Dass Raoult im Jahre 1885 gerade den theoretischen Wert 18,5 erhielt, ist sicher mehr dem Zufall als der Zu-

1) H. Jahn, Zeitschr. f. physik. Chem. **33**. p. 545. 1900; **36**. p. 453. 1901; **37**. p. 490. 1901; S. Arrhenius, Zeitschr. f. physik. Chem. **36**. p. 28. 1901; **37**. p. 315. 1901; W. Nernst, Zeitschr. f. physik. Chem. **36**. p. 596. 1901 etc.

2) J. H. van't Hoff, Die chemische Statik, Braunschweig 1899.

verlässigkeit jener ersten Messungen zuzuschreiben. Es sind also erst die drei letzten unter den angeführten Arbeiten, welche eine auf Sicherheit der Beobachtung beruhende Uebereinstimmung aufweisen.

Dieses auffällige Stetigwerden der Versuchsergebnisse mit dem Jahre 1894 ist das Resultat einer — in obiger Zusammenstellung übrigens nicht berücksichtigten — Arbeit von Nernst und Abegg¹⁾, in welcher die bisherigen Fehlerquellen aufgedeckt und zugleich experimentell verificirt wurden, deren Berücksichtigung erst eine einwandfreie Messung ermöglicht.

Durch die Discussion der beiden die Gefriertemperatur bestimmenden Vorgänge, des Wärmeaustausches mit der Umgebung und der damit verbundenen Eisauflösung bez. Eisabscheidung erhält Nernst bekanntlich das Correctionsglied, um das sich die beobachtete Gefriertemperatur (t') von der wahren Gleichgewichtstemperatur (T_0) unterscheidet:

$$t' = T_0 - \frac{k}{K}(t' - t_0),$$

wobei k eine für die Geschwindigkeit des Temperatenausgleiches bei Abwesenheit von Eis, K für die Geschwindigkeit der Eisausscheidung bez. Eisauflösung maassgebende Constante, und t_0 die „Convergenztemperatur“, welche sich bei Abwesenheit von Eis unter sonst gleichen Bedingungen einstellt.

In welchem Maasse die Grösse dieses Correctionsgliedes die von den verschiedenen Forschern erhaltenen Werte beeinflusst hat, ist ausser in der genannten Arbeit später nochmals eingehend von Abegg²⁾ discutirt worden. Seine Ausführungen entheben mich der Aufgabe, die vor der Aufstellung der genannten Principien erschienenen Arbeiten hier einer Kritik zu unterziehen. In die darauf folgende Zeit fallen die letzten Arbeiten von Meyer Wildermann, Raoult und Loomis.

Meyer Wildermann hat in einer Reihe umfangreicher Abhandlungen die Nernst'schen Formeln nach allen Richtungen hin angewendet und auch experimentell geprüft. So sehr dieses Unternehmen anzuerkennen ist, scheint doch Hr. Wildermann sein theoretisches Verdienst zu überschätzen, indem er in seinen

1) W. Nernst u. R. Abegg, Zeitschr. f. Chem. 15. p. 681. 1894.

2) R. Abegg, Wied. Ann. 64. p. 486. 1898.

Entwickelungen¹⁾, die eigentlich selbstverständliche Anwendungen der Nernst'schen Formeln darstellen, weitere Folgerungen zu bringen glaubt, als in diesen enthalten sind. In einer zusammenfassenden Abhandlung²⁾ lässt er Nernst das Verdienst, zuerst den Gedanken ausgesprochen zu haben, dass die Gefrierpunkte keine wahren, sondern scheinbare Punkte des Gleichgewichtes seien, fährt aber fort: „Ich habe dann Nernst's Gedanken im Princip aufgenommen und habe mir seit dann die Aufgabe gestellt, wenn auch auf einer abweichenden theoretischen Grundlage, den Gedanken in seiner theoretischen Bedeutung zu verfolgen und zu untersuchen.“

Was unter dieser abweichenden theoretischen Grundlage gemeint ist, geht aus einer früheren Abhandlung³⁾ hervor, wo Hr. Wildermann die Nernst'schen Ausführungen dahin interpretirt, dass die Eisauflösung mit der von Boguski studirten Auflösung von Metallen in Säuren als identisch betrachtet, und die Reaction der Eisausscheidung gar nicht als solche behandelt werde. „Ich dagegen“, schreibt er, „betrachtete die Sache so, dass zwischen Boguski's Reactionen und der Eisschmelzung keine Analogie besteht, dass diese zwei Arten Reactionen sui generis sind; ich ging bei der Behandlung der Theorie der Gefrierpunkte an Stelle dessen von dem Begriffe des vollständigen Gleichgewichtes aus, gelangte dementsprechend zu dem Schlusse, dass, wenn die Convergenztemperatur sich über dem Gefrierpunkte befindet, die Reaction des Eisschmelzens, und wenn die Convergenztemperatur sich unter dem Gefrierpunkte befindet, die Reaction der Eisausscheidung in Betracht kommt. Die zwei Reactionen sind entgegengesetzter Wirkung, haben wohl verschiedene Geschwindigkeitsconstanten, und die sie regulirenden Gleichungen müssen zuerst für sich studirt werden.“ Für das unbefangene Urtheil konnte es kaum missverständlich sein, dass die chemische, unter Wärmeentwicklung verlaufende Reaction der Metallauflösung mit der physikalischen unter Wärmebindung verlaufenden Reaction der Eisauflösung durchaus nicht identificirt

1) M. Wildermann, Zeitschr. f. phys. Chem. 19. 1896.

2) M. Wildermann, l. c. 32. p. 288. 1900.

3) M. Wildermann, l. c. 30. p. 359. 1899.

wurde. Dagegen war gewiss der Vergleich derselben berechtigt, indem man — zumal in einem Correctionsglied — für die einfachere Reaction Proportionalität der Lösungsgeschwindigkeit mit der Entfernung vom Gleichgewichtspunkt um so mehr annehmen durfte, als schon für die complicirtere diese Proportionalität experimentell nachgewiesen war. Wenn fernerhin die Geschwindigkeitsconstante für den Schmelz- und Gefrierprocess als die gleiche angenommen wurde, so entsprach dies dem Resultat der hierüber angestellten Versuche und war deshalb bei jeder vernünftigen Versuchsmethode einwandsfrei. Aber auch wenn Hr. Wildermann hätte nachweisen können, dass die Auflösung und Ausscheidung des Eises in der Nähe des Gleichgewichtes mit merklich verschiedener Geschwindigkeit erfolgte, so könnte er mit den oben angeführten ganz allgemeinen Bemerkungen nicht glaubhaft machen, die Frage erst auf der richtigen „theoretischen Grundlage“ gelöst zu haben.

Nicht minder ist in der Frage der experimentellen Priorität Hrn. Wildermann's Urteil¹⁾: Abegg habe sich überzeugt, dass seine Werte für die Geschwindigkeitsconstante des Eischmelzens beim Rohrzucker falsch und aus einer Oxydationsschicht in der Capillare entstanden seien, nicht zutreffend. Hr. Wildermann hätte sich bei Durchsicht der Abhandlung überzeugen können, dass die entscheidenden Bestimmungen²⁾ mit einem Thermometer ausgeführt wurden, dessen Geschwindigkeitsconstante (in minimo) $\frac{15^\circ}{\text{Min.}}$ betrug, dass sie also das frühere Resultat völlig einwandsfrei bestätigten. Ferner ist festzustellen, dass Abegg nicht „eine neue Methode“ benutzt hat, die „wesentlich wie die Wildermann'sche eingerichtet ist“, sondern seine eigene Methode lediglich durch grössere Dimensionen des Gefriergefässes und Anwendung constanter Rührung verbesserte.

Während Meyer Wildermann die Fehlerquellen bei seinem in $\frac{1}{1000}$ Grad getheilten Thermometer kleiner als 1 Zehntausendstel Grad schätzt, schreiben die anderen Experimentatoren ihren Thermometern eine viel geringere Genauigkeit zu.

1) M. Wildermann, l. c. 32. p. 290. 1900.

2) R. Abegg, l. c. 20. p. 226. 1896.

Durch ausserordentlich sorgfältiges Studium seines Thermometers wird Raoult¹⁾ bestimmt, seinen Resultaten eine Genauigkeit von nur $0,001^{\circ}$ beizumessen, während die sehr sinnreiche Methode an sich, die darin besteht, dass durch Zusammenbringen der Convergenztemperatur mit der Gleichgewichtstemperatur das Correctionsglied möglichst klein gemacht wird, eine beträchtlich grössere Genauigkeit ermöglichte. Ebenso war es die Schwierigkeit der Thermometerbehandlung, welche Loomis²⁾ veranlasste, seine früheren mit grosser Gewissenhaftigkeit ausgeführten Bestimmungen in neuester Zeit einer durchgehenden Wiederholung zu unterziehen.

Um diese in der Unvollkommenheit der Thermometer liegenden Hindernisse ganz zu beseitigen, hatte Abegg³⁾ schon im Jahre 1894 in Vorschlag gebracht, die Temperaturdifferenzen mit Hilfe von Thermoelementen zu bestimmen. Da man so hoffen konnte, auch mit kleineren Concentrationen brauchbare Resultate zu erhalten und dadurch erst eigentlich das theoretisch interessante Gebiet der Messung zugänglich zu machen, so folgte ich gern einer Aufforderung von Hrn. Prof. Nernst, diese Versuche wieder aufzunehmen.

Der Gefrierapparat,

der zu diesem Zwecke zu construiren war, ist wesentlich durch die von Hrn. Prof. Nernst vorgeschlagene Anwendung zweier nebeneinander gestellter Gefriergefässe gegeben, von denen das eine zur Aufnahme der Lösung, das andere für reines Wasser bestimmt ist. Indem diese symmetrisch in einem vom Kältebad allseitig umgebenen Trog angeordnet wurden, konnten äussere Temperaturschwankungen auf den zu beobachtenden kleinen Differentialeffect nur einen Einfluss niederer Ordnung ausüben, wenn in beiden Gefässen gleiche Eismengen ausgeschieden waren und mit gleicher Geschwindigkeit gerührt wurde. Diese Anordnung gestattet also die zur beabsichtigten Messung sehr geringer Depressionen unerlässlichen Vorteile einer Differentialmethode in vollem Maasse auszunutzen.

1) F. M. Raoult, l. c. p. 580.

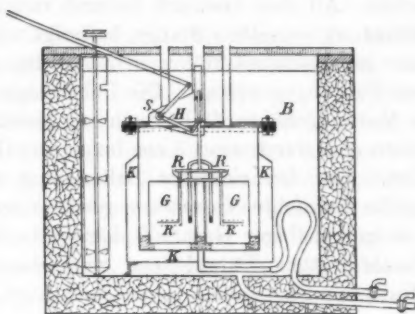
2) E. H. Loomis, l. c. p. 580.

3) W. Nernst u. R. Abegg, l. c. p. 681.

Die weiteren Gesichtspunkte waren vollständig durch die von Nernst und Abegg¹⁾ aufgestellten Principien gegeben, indem einerseits für einen möglichst langsamen Ausgleich der Temperaturen, andererseits für möglichst rasches Ausfrieren bez. Schmelzen des Eises gesorgt werden musste. Der *Apparat*, welcher nach vielen Vorversuchen schliesslich diesen Ansprüchen am besten zu genügen schien, möge hier mit Hilfe der Fig. 1 genau beschrieben werden, da seine Handhabung sich genügend einfach erwies, um die Verwendung in der Laboratoriumspraxis zuzulassen.

Die Gefriergefässe. Das doppelwandige *Kupfergefäss K*, von 18 cm innerer Höhe und gleich grossem inneren Durchmesser, dient zur Aufnahme der beiden *Gefriergefässe G*. Um diesen ein möglichst günstiges Verhältnis von Volumen zur Oberfläche zu geben, wählte ich sie mit halbkreisförmigem Querschnitt. Leider konnte mir in dieser Form kein Glasgefäss angefertigt werden. Ich musste mich daher mit Gefässen von 95 Proc. Silber begnügen, wodurch freilich die Wahl der zu untersuchenden Substanzen etwas beschränkt wurde. Die Gefässe mit je 630 ccm Inhalt sind auf Korkkeilen aufgestellt und durch zwei Glasplatten mit Luftzwischenraum gegeneinander isolirt.

Die Rührer R bestehen aus Silber und die Rührplatten sind der Form der Gefässe angepasst. Die Erfahrungen an dem Apparat von Abegg hatten gezeigt, dass die Rührstange, wenn sie in Röhren nach aussen geführt wird, sehr leicht durch das an ihr condensirte Wasser bei tiefer Temperatur des Kältebades festfriert. Auch ist dabei die Gefahr vorhanden,



$\frac{1}{10}$ natürl. Grösse.

Fig. 1.

1) W. Nernst u. R. Abegg, l. c. p. 681.

dass das condensirte Wasser heruntertropft und das Gefäss verunreinigt, dass ferner die oberen Teile der Rührerstange einen uncontrolirbaren Wärmeaustausch nach aussen verursachen. All dies liess sich dadurch vermeiden, dass die beiden Rührer an derselben Stange befestigt wurden, welche sich in einer geschlossenen Röhre in der Mitte des Deckels zwischen zwei Führungen bewegt. Die Uebertragung erfolgt durch einen im Messinggehäuse *H* beweglichen Hebel mit zwei Gelenken, dessen Axe durch eine 5 cm lange Stopfbüchse *S* nach aussen führt. Der bei richtiger Behandlung der Stopfbüchse¹⁾ so erzielte luftdichte Verschluss gewährt noch den Vorteil, dass man in beliebiger Gasatmosphäre arbeiten und das benutzte Wasser mittels Durchleitens gewaschener Luft im Apparat selbst reinigen kann. Die Querstange, welche die beiden Rührer verbindet, hat zwischen dem oberen Rand der Gefässe und dem Deckel so viel Spielraum, dass die Rührerplatten in ihren äussersten Lagen sich auf 1 cm dem Boden und der Oberfläche der Flüssigkeit nähern. Der Antrieb von aussen erfolgt durch zwei Hebel, von denen der eine an der Axe der Stopfbüchse, der andere an einem von dem Heissluftmotor betriebenen Rade befestigt ist. Sie bilden in der obersten Lage des Rührers einen rechten Winkel, sodass in dieser Lage die Geschwindigkeit am kleinsten ist und so die Oberfläche nur mässig bewegt wird. Ueber jedem Gefäss ist in dem Deckel eine 12 mm weite Röhre eingelötet zur Aufnahme des Beckmann'schen Thermometers oder der Pipetten, ausserdem in der Mitte ein Rohr zur Einführung der Leitungsdrähte für die Thermoelemente.

Die Thermoelemente bestehen aus Eisen und Constantan und zwar wurden nach einer Angabe von Prof. Nernst 20 Thermoelemente in 20 Paaren dünner Glasröhrchen untergebracht. Den Contact an den zur Vergrösserung der Oberfläche etwas ausgeblasenen Enden der Röhrchen bildet ein Quecksilbertropfen, der zugleich als guter Wärmeleiter für den Temperatenausgleich durch die dünne Glaswand hindurch dient. Die Röhrchen sind in zwei Reihen in einen Hartgummistreifen so eingesetzt, dass sie in beiden Gefässen ca. 7 mm

1) Vgl. hierüber C. Bach, Maschinenelemente, 8. Auflage. p. 602. Stuttgart 1901.

vom Rand auf ca. 3 cm in die Flüssigkeit eintauchen. Der Deckel des grossen Gefässes kann durch neun in zwei Eisenringen eingelagerte Schrauben mit Gummizwischenlage luftdicht aufgesetzt werden.

Ein wesentliches Erfordernis für die Vergleichbarkeit der verschiedenen Messungen bei dieser Differentialmethode liegt darin, dass das Eis sich stets in gleicher Menge und möglichst gleicher Beschaffenheit ausscheidet. Es war deshalb wünschenswert, das Eis in dem fertig zusammengesetzten Apparate auszufrieren, weil andernfalls beim Zusammensetzen uncontrolirbare Verluste und Veränderungen entstanden wären. Zu diesem Zwecke ist durch die doppelte Wandung des Kupfergefässes eine Röhre nach aussen geführt, welche mittels eines Schlauches an eine Abflussröhre im Boden des Kältebades *B* angeschlossen werden kann, ohne dass das darin befindliche Eiswasser abgelassen werden muss.

Das *Unterkühlungsbad* wurde dann in einem besonderen Gefäss mit doppelter Wand angesetzt und durch eine Oeffnung im Boden an die Zuleitung zum Trog angeschlossen. Hatte man den Trog schon tags zuvor in das Kältebad eingesetzt, so genügte meist dreimaliges Ein- und Ablassen, um die gewünschte Unterkühlung von 0,8 bis 1° herzustellen. Um eine möglichst günstige Ausscheidung zu erzielen, waren an beiden Rührern auf jeder Seite etwas abstehende Silberdrahtnetze mit Silberdraht befestigt. Es zeigte sich dann jedesmal nach Beendigung eines Versuches, dass sich fast die ganze Eismenge in äusserst dünnen Blättchen an den Drahtnetzen abgeschieden hatte, wohl deshalb, weil während der Ausscheidung, die durch Einwerfen eines Eisstückchens ausgelöst wird, der Rührer sich durch die ganze Masse bewegt. Es wurde so in der That erreicht, dass die Flüssigkeit mit der Eismasse selbst durchgeführt wird und diesem Umstand ist wohl zum grossen Teil die erzielte Constanz der Einstellung zu verdanken. Hauptsächlich wurde so erreicht, dass keine grösseren Eismengen sich zwischen den Thermoelementen festsetzten.

Einige Male schied sich das Eis von selbst aus, bevor das Unterkühlungsbad abgelassen war. Es bildete sich dann an den Oberflächen der Gefässe eine dünne Eisschicht. Man könnte diesen Umstand wegen der Verminderung des Tem-

peraturausgleiches für günstig halten und ihn absichtlich herbeiführen, jedoch konnte ich dabei keinen Unterschied der Einstellung gegen den sonst erhaltenen erkennen.

Das *Kältebad*, welches den Apparat vollständig überdeckt, befindet sich in einem Kessel von 35 cm Höhe und Durchmesser, das unten mit einem Abflussrohr versehen ist. Zwei Turbinen in langen Röhren sind darin als Rührer einander gegenüber aufgestellt und werden durch denselben Motor, welcher das innere Rührwerk treibt, in schnelle Umdrehung versetzt, sodass die Temperatur innerhalb $\frac{1}{100}$ Grad constant bleibt. Dieser Kessel steht nochmals in einem grösseren. Der Zwischenraum ist mit Seideabfällen als Wärmeisolator gefüllt und oben durch einen Holzring verschlossen. Darüber liegen zwei dicke Filzplatten.

Messung der Thermoefecte. Zur Messung der Thermoströme diente ein d'Arsonvalgalvanometer mit nur 5 Ohm innerem Widerstand, das eigens zu diesem Zwecke von Edelmann bezogen war. Es gab bei einem Gesamtwiderstand des Stromkreises von 15 Ohm und Scalenabstand von 3 m die genügende Empfindlichkeit von $0,0000875^\circ$ bei commutirtem Ausschlag von 1 mm. Schwankungen der Empfindlichkeit, die durch kleine Aenderungen in der Ruhelage der Spule auf 2 Proc. steigen konnten, ferner die elastische Nachwirkung in der Aufhängung machten es nötig, mit Compensation zu arbeiten.

Es stand mir dazu ein Westonelement mit grosser Capacität zur Verfügung, wie es direct als Arbeitselement hätte benutzt werden können. Dieses wurde zum Ueberfluss von Zeit zu Zeit mit einem anderen Normalelement verglichen.

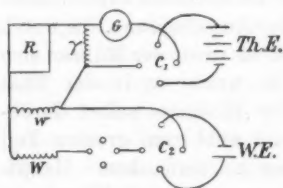


Fig. 2.

Die *Anordnung*, welche sich als zweckmässig erwies, geht aus Fig. 2 hervor. Das Westonelement ist in einem Widerstand W von 31900 Ohm und w von 434 Ohm geschlossen. Von letzterem ist durch den Rheostatenkasten R an den Widerstand γ von 3 Ohm im Galvanometerkreis abgezweigt. Allein durch Variation des Rheostatenwiderstandes konnten dann die Effecte von $0,004^\circ$ bis $0,1^\circ$ compensirt werden. Die kleineren

und der nicht compensirte Rest wurden durch Ausschlag gemessen und die Ausschlagsempfindlichkeit jedesmal durch gleichzeitige Messung des Ausschlages und der Compensation bei den höheren Concentrationen bestimmt. Die compensirende elektromotorische Kraft an den Enden des Widerstandes berechnet sich dann in Temperaturgraden ausgedrückt zu

$$E = f \cdot \frac{E \cdot \gamma \cdot w}{W(w + \gamma + R) + w(\gamma + R)},$$

wo f der Aichungsfactor und E die elektromotorische Kraft des Westonelementes.

Die Commutatoren. Selbstverständlich war zur Vermeidung fremder Thermoeffecte die grösste Vorsicht geboten. Dies betraf besonders den unerlässlichen *Commutator* C_1 für die Thermoelemente. Die benutzte Form desselben ist wohl zuerst von Hrn. Prof. Des Coudres angegeben, dem ich für probe-weise Ueberlassung des ersten Modelles zu grossem Dank verpflichtet bin. Er besteht einfach in einem Hahn mit zwei parallelen Bohrungen, welche je zwei mit Quecksilber gefüllte Glasröhren paarweise in Verbindung setzen. An den abwärts gebogenen Enden der Röhren, die an ihrer höchsten Stelle trichterförmige Ansätze zum Einfüllen des Quecksilbers tragen, sind Gummischläuche angesetzt und in den Enden derselben die mit Gummischläuchen geschützten Zuleitungsdrähte befestigt. Diese bestehen aus Kupferdraht, welcher bis in die letzten Röhrchen der Thermoelemente führt und nur in der Mitte durchgeschnitten war, um den Apparat auseinandernehmen zu können. Um die Contactstellen von Quecksilber und Kupfer auf gleicher Temperatur zu erhalten, sind die Schlauchenden in ein mit Quecksilber gefülltes Gefäss eingeführt und dieses in ein Wasserbad versenkt. In demselben befindet sich der auf einem Hartgummistab aufgewinkelte Widerstand innerhalb eines verschlossenen Reagenzglases. Das Ganze war in Watte fest verpackt, ebenso das Galvanometer.

Trotzdem änderte sich durch die hinter dem Commutator auftretenden Thermoeffecte die Ruhelage oft noch so rasch, dass zu einer sicheren Ablesung drei- oder fünfmaliges Commutiren nötig war. Aus diesem Grunde war es auch geboten, wenn durch Compensation gemessen wurde, den Commutator des Normalelementes durchaus gleichzeitig mit dem der Thermo-

elemente auszuwechseln, um eine möglichst rasche Einstellung zu erreichen. Der Commutator C_2 war deshalb direct über der Axe des Commutators C_1 drehbar befestigt und griff mit einer Klammer in den Griff des Hahnes ein. Seine Platin-contacte liessen sich so gleichzeitig wie die Quecksilbercontacte in Berührung bringen.

Discussion der Fehlerquellen.

Um ein Urtheil über die *methodischen Fehler* in der Einstellung der Temperatur zu erhalten, muss bekanntlich die *Convergenztemperatur* und *Abkühlungsgeschwindigkeit* der Gefriergefässe bestimmt werden. Ich verfolgte deshalb während mehrerer Stunden den Temperaturabfall bei constanter Rührgeschwindigkeit und Temperatur des Kältebades. Die Convergenztemperatur berechnete sich hieraus¹⁾ um ca. $0,08^\circ$ höher als die des Kältebades. Obgleich dieser Wert auf $0,1^\circ$ unsicher sein mag, zeigt er doch, dass die Wärmeerzeugung durch den Rührer und der Temperatúrausgleich durch die nach aussen führenden Röhren ein sehr geringer ist. Dies kann seinen Grund darin haben, dass die grosse Kupfermasse des Troges einen gegen den Wärmeverlust nach aussen raschen Ausgleich mit dem Kältebad bewirkt. Trotzdem ergab infolge des doppelten Luftmantels die Newton'sche Geschwindigkeitsconstante (k) des Temperatúrausgleiches der Gefässe gegen das Kältebad den sehr geringen Wert von $0,0040^\circ$. Die Bedeutung dieser Grösse ist die, dass bei einer Temperaturdifferenz von 1° zwischen Gefriergefäss und Kältebad die Temperatur in den Gefriergefässen in einer Minute um $0,004^\circ$ sinken würde. Da die Geschwindigkeitsconstante der Eisausscheidung (K) ca. 8 Grad-Min. beträgt, so ergibt sich die Aenderung der Gefriergefässe bei Aenderung des Kältebades um 1° nach der von Nernst gegebenen und von Abegg²⁾ später nochmals bestätigten Formel zu $k/K \cdot 1^\circ = 0,0005^\circ$.

Für den beobachteten Differentialeffect kommt natürlich nur die Differenz zweier Grössen von dieser Ordnung in Betracht. Thatsächlich konnte auch, wenn das äussere Bad in weiten Grenzen variirt wurde, kein Einfluss auf den Ausschlag

1) Vgl. W. Nernst u. R. Abegg, l. c.

2) R. Abegg, Zeitschr. f. phys. Chem. 20. p. 227. 1896.

bemerkt werden. Trotzdem wurde das Kältebad stets zwischen $-0,1^{\circ}$ und $-0,2^{\circ}$ gehalten.

Von ungleich grösserem Einfluss ist natürlich der Ausgleich der beiden Gefässe untereinander. Der Gang kann durch die Thermoelemente bei so kleinen Temperaturdifferenzen (unter $0,1^{\circ}$) verfolgt werden, dass er von der Temperatur des constanten Kältebades als unabhängig betrachtet werden darf. Die Gefässe convergiren natürlich auf dieselbe Temperatur, da sie sich unter absolut gleichen Bedingungen befinden. Für die Geschwindigkeitsconstante k ergab sich $0,008^{\circ}$. Dementsprechend berechnete sich die Abweichung der scheinbaren von der wahren Depression für die höchste beobachtete Gefrierpunktsniedrigung von $0,1^{\circ}$ zu $0,0001^{\circ}$, also ca. 1 promille des Effectes. Infolge dessen liess sich durch Variation der Rührgeschwindigkeit auch bei den höchsten Concentrationen kein Einfluss constatiren. Trotzdem wurde der Rührer bei allen Versuchen mittels der Gasregulirung auf ca. 30 Umdrehungen in der Minute gehalten.

Die so berechneten Correctionen galten streng genommen nur für die Gefriertemperatur des reinen Wassers, da nach den Versuchen von Nernst und Abegg¹⁾ die Geschwindigkeit der Eisausscheidung mit der Natur des gelösten Stoffs beträchtlichen Aenderungen unterliegt. Um zu beurteilen, ob diese auch noch bei den hier eingehaltenen Verdünnungen und bei der nahen Gleichheit von Aussentemperatur und Convergenztemperatur in Betracht kommen, suchte ich in einer Reihe von Vorversuchen die Geschwindigkeitsconstante der Eisausscheidung in Rohrzuckerlösung zu messen, da für diese bei allerdings höheren Concentrationen eine grössere Correction als für reines Wasser nachgewiesen ist. Obgleich ich hierbei nur den letzten Teil des Temperaturganges nach dem Einpipettiren der Lösung berücksichtigte und die Messung durch die Thermoelemente zum Teil mit Hülfe eines Registrirapparates ausführte, waren die Schwankungen der Resultate zu gross, um einen Unterschied zwischen der Gefriergeschwindigkeit in Lösung und reinem Wasser erkennen zu lassen. Auch directes Ausfrieren fertiger, unterkühlter Lösungen gab bald

1) W. Nernst u. R. Abegg, l. c.

grössere, bald kleinere Constanten als die des reinen Wassers. Demnach ist bei den verwendeten stark verdünnten Lösungen ein Einfluss der Natur des gelösten Stoffs auf die Temperatureinstellung nicht zu befürchten.

Zufällige Störungen. Wenn also die Methode auch mit keinen merklichen constanten Fehlern behaftet scheint, so ist doch das Auftreten kleiner *uncontrolirbarer Störungen* nicht zu vermeiden. Wärmeströmungen im Luftmantel, welche sich auf die leicht leitenden silbernen Stiele und die Wände der Silbergefässe übertragen, Veränderungen in der Beschaffenheit des Eises, möglicherweise auch Abtropfen condensirten Wassers am Deckel, sind wohl die Ursache, dass die Ablesungen, die nach Einimpfen des Eises in Intervallen von etwa 10 Minuten wiederholt wurden, meist innerhalb drei Hunderttausendstel, manchmal während einer Stunde auch gegen ein Zehntausendstel Grad schwankten. Falls man allerdings die Lösungen rasch nacheinander zupipettiren kann, ist der hierdurch entstehende Fehler, der ja nur für die geringsten Concentrationen in Betracht kommt, kleiner als drei hunderttausendstel Grad anzuschlagen.

Es zeigte sich nun in der That durch die Vorversuche, dass die niedersten Concentrationen sich nach zwei bis drei Minuten vollständig innerhalb dieser Schwankungen einstellten. Hierdurch wird ein schnelles Arbeiten ermöglicht.

Das Einpipettiren. Der darin liegende Vorteil ist zwar illusorisch, wenn nicht zugleich verhütet wird, dass das *Einpipettiren* selbst merkliche Veränderungen der Verhältnisse hervorbringt. Ich glaube dies durch folgende Anordnung so weit als möglich vermieden zu haben.

Die Oeffnung der Pipette war zu einer sehr feinen Spitze ausgezogen und oben durch einen Schlauch mit Quetschhahn verschlossen. Es lässt sich dann durch geeignetes Rundschmelzen der Oeffnung erreichen, dass auch bei starker Temperaturänderung aus der vertical stehenden Pipette nichts ausfliesst. Die gefüllte Pipette konnte daher in den Trog so weit eingesenkt werden, dass die Oeffnung nicht mit dem Wasser in Berührung kam. Die Erweiterung, die 3—10 ccm fasste, war 2,5 cm über der Oeffnung angesetzt und befand sich so vollständig im inneren Luftmantel des Kupfertroges. Die Pipetten waren aus besonders dünnem Glas gefertigt, sodass

die Flüssigkeit nach 7 Min. genügend abgekühlt war. Reines Wasser gab, auf diese Art zur Probe in concentrirte Lösung einpipettirt, keinen dauernden Effect.

Die *Mutterlösung* wurde in Wägegläschen angesetzt und nach jedesmaligem Einfüllen der Pipette zurückgewogen. Hierdurch wird nicht nur die Concentration äusserst genau bestimmbar, sondern man kann sie auch in beliebigem Verhältnis ansteigen lassen. Setzt man z. B. zwei Mutterlösungen im Concentrationsverhältnis 1:10 an und füllt die Pipette zum erstenmal mit 0,5 ccm der verdünnten Lösung, so lassen sich, ohne merkliche Fehler im Zurückwägen, mit im ganzen nur 10 ccm einpipettirter Lösung, Concentrationen von 1:200 herstellen, sodass jede das Doppelte der vorhergehenden beträgt.

Die Arbeitsweise.

war dann folgende: Nachdem mit der oben beschriebenen Vorrichtung die Gefässe unterkühlt und das Eis ausgeschieden war, wurde das Thermometer herausgenommen und während mindestens einer Stunde der Ausschlag von wenigen Zehntausendstel Grad beobachtet, der hauptsächlich den Verunreinigungen des Wassers im Vergleichsgefäss zuzuschreiben ist. Zuletzt wurde die Pipette mit der ersten geringen Menge der Mutterlösung eingesetzt. Diese wurde gleich nach der letzten Ablesung vorsichtig eingeblasen. Möglichst schnell wurde dann die Pipette mit der zweiten Dosis gefüllt und eingesetzt. Bis die Mutterlösung zurückgewogen war, konnte der Ausschlag unter 5—7 maligem Commutiren abgelesen werden. So liessen sich die ersten Concentrationen in Abständen von ca. 7 Min. einführen. Die grösseren Effecte über $0,005^{\circ}$ wurden zuerst mit Compensation, dann mit directem Ausschlag und wieder mit Compensation gemessen, wobei die erste und letzte Messung um nicht mehr als einige Hunderttausendstel Grad differirten. Ihr Mittel diente zur Aichung des Ausschlages. Hierbei folgten die einzelnen Concentrationen in Abständen von 15—20 Min. Die letzte Concentration beobachtete man, dann nach längerer Zeit. Sie zeigte selten grössere Schwankungen als $0,0001^{\circ}$.

Das verwendete *Wasser* wurde zum Theil durch Destillation mit H_2SO_4 und KOH gewonnen, das meiste jedoch durch

Ausfrieren gewöhnlichen destillirten Wassers während des Winters. Es erhielt sich ausgezeichnet in grossen Glasballons, welche lange Zeit zum Aufbewahren von Accumulatorensäure gedient hatten. Seine Leitfähigkeit betrug zwischen 1 und $3 \cdot 10^{-6}$ in absoluten Einheiten. Harnstoff und Zucker wurden teilweise in gewöhnlichem destillirten Wasser untersucht, was keinen Unterschied zu bedingen scheint.

Die *Präparate* wurden natürlich, soweit sie nicht durchaus zuverlässig waren, durch mehrfaches Umkrystallisiren gereinigt. Da die Verunreinigungen meist nahe gleiches Moleculargewicht besitzen, ist hierdurch übrigens nur in wenigen Fällen ein Fehler zu befürchten. Der Krystallwassergehalt der Salze wurde stets zweimal bestimmt. Nur bei Nickelsulfat wurde die Concentration der Mutterlösung durch Elektrolyse ermittelt. Die übrigen Substanzen wurden direct abgewogen. Bei Baryumnitrat III, wo ein Versehen in der Herstellung der Concentration vorkam, musste sie nachträglich durch Fällung bestimmt werden. Da nur noch wenig Substanz vorhanden war, kann der Gehalt mit einem Fehler von 0,5 Proc. behaftet sein. Diesem Umstand ist wohl die Abweichung dieser Reihe von den beiden anderen zuzuschreiben. Die meisten Substanzen wurden der grösseren Sicherheit halber mehrmals und zwar, um constante Fehler zu vermeiden, zu verschiedenen Zeiten und mit verschiedenen Mutterlösungen untersucht. Fünf Harnstoffserien dienten als Aichmessungen. Sie wurden immer zwischen einigen anderen Versuchen ausgeführt.

Um den *Aichfactor* zu bestimmen, musste eine Messung zugleich mit den Thermoelementen und dem Beckmann'schen Thermometer gemacht werden. Dieses war dabei wie gewöhnlich durch einen Gummischlauch in der hierfür bestimmten Röhre festgehalten und wurde, um eine sichere Einstellung zu erreichen, mit einem rotirenden Hämmerchen rasch aber leicht geklopft. Da infolge dessen kein Platz zur Aufnahme der Pipette zur Verfügung stand, war hierbei die Mutterlösung auf andere Weise als die oben angegebene abzukühlen. Zu diesem Zwecke führte ein Glasrohr durch eine sonst geschlossene Oeffnung des Deckels bis in das Gefriergefäss. Direct über dem Deckel war sie durch einen Patentschlauch mit einer zweiten Röhre verbunden, dem an einer rechtwinkligen Biegung

eine Erweiterung angeblasen war. Das Ganze befand sich im Kältebad mit der Erweiterung am tiefsten Punkte. In diese wurde dann die Substanz einpipettirt und nachher unter Hochheben des Ansatzrohres eingeblasen und durch dreimaliges Zurücksaugen ausgespült. Diese Methode hat vielleicht gegenüber der sonst angewendeten den Vorteil, dass die Abkühlung eine intensivere wird. Da jedoch die Berührung mit dem Gummischlauch für manche Substanzen unzulässig ist und bei einer zweiten heberartigen Construction das vom Reservoir aufwärts führende enge Glasrohr, welches den Gummischlauch ersetzen sollte, leicht zufror, glaubte ich für die weiteren Messungen von dieser Methode absehen zu müssen.

Die Aichung ergab für *Harnstoff* im Mittel die Moleculardepression zu 1,85. Dies ist auch der Wert, den Abegg bei seinen grössten Concentrationen, also den zuverlässigsten, fand und auch, wie bekannt, der Mittelwert der Raoult'schen Resultate. Zugleich ist 1,85 der theoretische Wert. Ich habe deshalb diese Aichung sämtlichen Versuchen zu Grunde gelegt.

Natürlich kann diese Messung mit dem Beckmann'schen Thermometer mit der Genauigkeit der Messungen an den Thermoelementen nicht concurriren. Falls daher eine zuverlässigere als die jetzt vorhandenen Bestimmungen später einen anderen Wert für Harnstoff ergeben sollte, so müssten sämtliche von mir erhaltenen Resultate auf diesen neuen Wert umgerechnet werden. Leider giebt Loomis in seiner neuesten Arbeit keine Versuche über Harnstoff an, da die von ihm angestellten sich widersprechen. Auf einer leichten Zersetzlichkeit der Lösungen, wie Loomis vermutet, kann dies nach meinen Resultaten nicht beruhen. Es wäre deshalb eine Wiederholung der Versuche erwünscht, da Harnstoff der einzige Nicht-elektrolyt zu sein scheint, von dem bis jetzt die Gültigkeit der Gasgesetze auch für höhere Concentrationen sichergestellt ist.

Vor der Wiedergabe der Resultate seien zur Erläuterung der Versuchsverhältnisse und der Berechnung die Beobachtungsdaten für eine vollständige Versuchsreihe mitgeteilt. Es ist hierzu die Harnstoffbestimmung vom 22. Januar 1900 herausgegriffen, weil diese unter den ausgeführten Versuchen den grössten Concentrationsbereich umfasst.

Tab. I zeigt zunächst die Concentrationsverhältnisse beim Herstellen der Mutterlösungen.

Tabelle I.

Wägegglas I	24,718		
+ Harnstoff	30,249	5,531 g Harnstoff in	0,002 666 Mol. in
+ Wasser	59,232	34,514 g Lösung I	1 g Lösung I
Wägegglas II	31,032		
+ Lösung I	36,170	5,138 g Lösung I in	0,000 3833 Mol. in
+ Wasser	66,796	35,764 g Lösung II	1 g Lösung II

Das Gefriergefäß enthielt 625,6 g Wasser vom Leitvermögen $1,3 \cdot 10^{-6}$ (abs. Einh.). Die Unterkühlung betrug $0,805^{\circ}$; demnach verblieben nach der Eisausscheidung

$$625,6 - \frac{0,805 \cdot 626}{80} = 619,3 \text{ g Wasser.}$$

In Tab. II giebt Columnne I die Rückwägungen der Mutterlösungen im Wägegglas bei Herstellung der verschiedenen Concentrationen, Columnne II die entnommenen Mengen der Mutterlösungen, Columnne III die Gesamtmenge der in das Gefriergefäß eingeführten Grammmoleculé Harnstoff, Columnne IV die Menge des gleichzeitig einpipettirten Wassers, Columnne V den aus III und IV zu berechnenden Normalgehalt m der Lösungen.

Tabelle II.

	Wägegglas + Lösung	Entnommene Lösung	Mol. Harnstoff	g Wasser	m
	66,925	—	—	—	—
1.	65,796	0,871	0,000 334	0,9	0,000 538
2.	64,630	2,166	0,000 830	2,1	0,001 336
3.	62,552	4,244	0,001 626	4,1	0,002 607
4.	59,873	6,923	0,002 653	6,7	0,004 235
	51,966	—	—	—	—
5.	50,263	0,803	0,004 794	7,4	0,007 645
6.	49,019	2,047	0,008 108	8,4	0,012 92
7.	47,614	3,452	0,011 86	9,6	0,018 87
8.	44,765	6,301	0,019 46	12,0	0,030 84
9.	41,970	9,096	0,024 25	14,3	0,042 48

In Tab. III der Beobachtungsdaten giebt Columnne I die Zeit der Galvanometerablesung, Columnne II den beobachteten Ausschlag a in commutirten Millimetern (im Mittel aus mindestens fünf Ablesungen), Columnne III den wahren Ausschlag α gegen die Concentration 0, Columnne IV den zur Compensation gezogenen Widerstand R , Columnne V den Restausschlag a' bei Compensation, Columnne VI den wahren Restausschlag α' gegenüber dem reinen Wasser.

Tabelle III.

	Zeit	a	α	R	a'	α'
	11 ^h 07 ^m	- 9,0 ₇	—	—	—	—
	11 20	- 9,1 ₀	—	—	—	—
1.	11 30	+ 2,3 ₅	11,4 ₅	—	—	—
2.	11 42	+ 18,4 ₂	27,5 ₂	—	—	—
3.	11 53	+ 54,0	63,1	—	—	—
4. {	12 ^h 05 ^m	+ 80,0	89,1	—	—	—
	12 10	—	—	5700	-7,8	+1,3
5. {	12 20	—	—	3000	-5,4	+3,7
	12 24	+152,3	161,4	—	—	—
	12 28	—	—	3000	-5,1	+4,0
6. {	12 37	—	—	1540	-9,9	-0,8
	12 41	+265,0	274,1	—	—	—
	12 46	—	—	1540	-9,5	-0,4
7. {	12 55	—	—	940	-4,3	-4,8
	12 58	+391,2	400,3	—	—	—
	1 ^h 02 ^m	—	—	940	-4,3	+4,8
8. {	1 08	—	—	400	-6,9	+2,2
	2 ^h 35 ^m	—	—	400	-6,6	+2,5
9. {	2 49	—	—	170	-9,5	-0,4
	3 ^h 08 ^m	—	—	170	-9,2	-0,1
	4 ^h 20 ^m	—	—	170	-8,5	+0,6

Aus dem Widerstand R ergibt sich nach der p. 531 angeführten Gleichung unter Einsetzung des durch directen Vergleich mit dem Beckmann'schen Thermometer ermittelten

Wertes von $f.E.\gamma.w = 1527000$ und der constanten Widerstände W, w, γ der compensirte Teil des Ausschlages in Temperaturgraden (Tabelle IV, Columne I); aus den Ausschlägen α' und α berechnen sich durch Multiplication mit dem Reductionsfactor 0,0008750 die zugehörigen Temperaturgrade (Columne II und IV). Die durch Ausschlag ermittelten Werte stimmen vorzüglich mit den durch Compensation unter Berücksichtigung des Restausschlages erhaltenen (Columne III) überein.

Tabelle IV.

	t (comp.)	$\alpha' \cdot 8750 \cdot 10^{-8}$	t' (comp.)	t (Ausschlag)
1.	—	—	—	0,001 002
2.	—	—	—	0,002 406
3.	—	—	—	0,005 530
4.	0,007 70	+ 0,000 113	0,007 816	0,007 801
5.	0,013 78	+ 0,000 35	0,014 13	0,014 13
6.	0,023 98	- 0,000 05	0,023 93	0,024 00
7.	0,034 41	+ 0,000 55	0,034 96	0,035 00
8.	0,056 78	+ 0,000 18	0,056 96	—
9.	0,078 50	\pm 0,000 00	0,078 50	—

Versuchsergebnisse.

Für die *Auswahl* der zu untersuchenden *Substanzen* waren folgende Gesichtspunkte maassgebend. Von Interesse sind zunächst die Nichtelektrolyte, welche in concentrirter Lösung anomales Verhalten zeigen. Die bekanntesten Beispiele hierfür sind *Rohrzucker* und *Alkohol*. Während man die Erklärung für die zu grossen Werte bei Rohrzucker in einer durch die Moleculargrösse bedingten Abweichung von den Gasgesetzen finden konnte, sind die zu kleinen Werte bei Alkohol auf dessen Flüchtigkeit zurückgeführt worden. In beiden Fällen wären also in ganz verdünnten Lösungen normale Werte zu erwarten. Andererseits konnte man anomale Werte gerade in den verdünnten Lösungen bei den Salzen einer schwachen Säure oder Base vermuten, wo *hydrolytische Spaltung* eintritt.

Im Hinblick hierauf wurden einige *Salze von Schwermetallen* untersucht, da diese sich mit analog constituirten Salzen, die nicht hydrolytisch gespalten sind, leicht vergleichen lassen. Schliesslich war es wünschenswert, auch in der Frage der *starken Elektrolyte* durch die Bestimmung des osmotischen Druckes einen Anhaltspunkt zu gewinnen. Es hat sich hier bis jetzt gezeigt, dass die aus den Gefrierpunktsdepressionen berechneten Dissociationsgrade durchgehend grösser ausfallen als die aus der Leitfähigkeit berechneten.¹⁾ Eine Untersuchung bei geringen Concentrationen war um so notwendiger, als gerade in dem bisher untersuchten Bereich die Aenderung der Dissociation und damit auch des vermutlichen Einflusses der Ionenladungen sehr stark ist. Ich gehe im Folgenden zur Wiedergabe der Resultate, wobei m die Anzahl Grammmoleculé auf 1000 g Wasser, t die Gefrierpunktsdepression, t/m die moleculare Gefrierpunktsdepression bedeuten.

Harnstoff.

I.			II.		
m	t	t/m	m	t	t/m
0,001 931	0,003 606	1,866	0,002 387	0,004 457	1,862
0,003 361	0,006 264	1,864	0,004 947	0,009 11	1,844
0,005 362	0,009 939	1,854	0,007 647	0,014 18	1,855
0,008 133	0,015 06	1,852	0,011 02	0,020 44	1,854
0,011 44	0,021 15	1,849	0,014 64	0,027 11	1,851
0,015 16	0,028 17	1,852	0,018 51	0,034 30	1,852

III.			IV.		
m	t	t/m	m	t	t/m
0,000 532	0,001 009	1,898	0,001 60	0,002 99	1,876
0,001 070	0,001 983	1,853	0,004 05	0,007 49	1,859
0,002 055	0,003 770	1,836	0,008 04	0,014 88	1,850
0,003 148	0,005 800	1,843	0,012 99	0,024 00	1,853
0,004 532	0,008 312	1,835	0,019 78	0,036 49	1,853
0,006 200	0,014 21	1,843	0,027 00	0,049 63	1,847

1) R. Abegg, l. c. p. 232.

V.

m	t	t/m
0,000 538	0,001 002	1,86
0,001 336	0,002 406	1,80
0,002 607	0,005 580	2,12
0,004 235	0,007 846	1,851
0,007 645	0,014 13	1,849
0,012 918	0,023 93	1,850
0,018 87	0,034 96	1,853
0,030 84	0,056 96	1,848
0,042 48	0,078 50	1,848

Rohrzucker.

I.

m	t	t/m
0,001 097	0,002 109	1,92
0,002 530	0,004 749	1,878
0,004 235	0,008 032	1,874
0,006 720	0,012 48	1,860
0,009 695	0,018 06	1,863

II.

III.

m	t	t/m	m	t	t/m
0,000 112	0,000 234	2,08	0,000 344	0,000 645	1,87
0,000 320	0,000 616	1,93	0,000 995	0,001 867	1,88
0,000 671	0,001 274	1,90	0,002 303	0,004 332	1,881
0,001 410	0,002 640	1,871	0,004 278	0,007 957	1,861
0,002 761	0,005 190	1,876	0,010 26	0,019 06	1,857
0,006 617	0,010 52	1,873	0,018 41	0,034 34	1,866
0,011 95	0,022 45	1,881	0,036 5	0,067 93	1,862
0,024 66	0,046 80	1,897			

Aethylalkohol.

I.			II.		
<i>m</i>	<i>t</i>	<i>t/m</i>	<i>m</i>	<i>t</i>	<i>t/m</i>
0,000 402	0,000 670	1,67	0,000 269	0,000 435	1,611
0,001 32	0,001 87	1,65	0,000 710 4	0,001 15	1,574
0,002 151	0,003 56	1,656	0,001 414	0,002 26	1,600
0,004 993	0,008 32	1,668	0,002 998	0,004 81	1,607
0,008 874	0,014 90	1,680	0,006 308	0,010 31	1,637
0,016 87	0,028 21	1,676	0,012 48	0,020 87	1,671
0,036 27	0,063 00	1,736	0,028 92	0,049 36	1,706
			0,040 87	0,067 58	1,655

Pb(NO₃)₂.

I.			II.		
<i>m</i>	<i>t</i>	<i>t/m</i>	<i>m</i>	<i>t</i>	<i>t/m</i>
0,000 413	0,002 38	5,77	0,000 988	0,005 61	5,67
0,000 787	0,004 28	5,43	0,001 457	0,007 74	5,317
0,001 204	0,006 38	5,30	0,002 055	0,010 77	5,235
0,001 754	0,009 24	5,261	0,002 805	0,014 49	5,152
0,002 425	0,011 94	4,922	0,003 154	0,018 20	5,267
0,003 450	0,017 44	5,052	0,004 332	0,021 76	5,025
0,004 495	0,022 63	5,045	0,005 072	0,025 29	4,982
0,005 570	0,027 70	4,975			

III.

<i>m</i>	<i>t</i>	<i>t/m</i>
0,000 123	0,000 656	5,35
0,000 362	0,001 99	5,49
0,000 780	0,004 17	5,357
0,001 617	0,008 49	5,251
0,003 157	0,016 24	5,149
0,005 808	0,029 16	5,021
0,009 022	0,044 25	4,902
0,017 37	0,081 52	4,697

Ba(NO₃)₂.

I.			II.		
<i>m</i>	<i>t</i>	<i>t/m</i>	<i>m</i>	<i>t</i>	<i>t/m</i>
0,000 383	0,002 140	5,58	0,000 096 4	0,000 507	5,265
0,000 763	0,004 077	5,34	0,000 316 9	0,001 720	5,422
0,001 259	0,006 654	5,28	0,000 665 4	0,003 520	5,295
0,001 733	0,009 112	5,26	0,001 355	0,007 206	5,317
0,002 200	0,011 50	5,22	0,002 870	0,015 20	5,300
0,002 681	0,014 01	5,22	0,005 422	0,027 80	5,188
0,003 158	0,016 28	5,16	0,008 552	0,043 11	5,045
0,003 646	0,018 92	5,19			
0,004 135	0,021 31	5,15			

CuSO₄.

I.

<i>m</i>	<i>t</i>	<i>t/m</i>
0,001 521	0,004 787	3,133
0,002 653	0,008 065	3,040
0,003 999	0,011 72	2,912
0,005 433	0,015 51	2,857

II.

III.

<i>m</i>	<i>t</i>	<i>t/m</i>	<i>m</i>	<i>t</i>	<i>t/m</i>
0,000 233	0,000 766	3,288	0,000 286	0,000 932	3,26
0,000 735	0,002 360	3,209	0,000 843	0,002 657	3,15
0,001 467	0,004 611	3,141	0,001 520	0,004 830	3,110
0,002 328	0,007 054	3,030	0,002 619	0,007 89	3,012
0,003 441	0,010 11	2,937	0,004 316	0,012 55	2,908
0,004 810	0,013 92	2,893	0,006 670	0,018 59	2,795
0,006 097	0,017 18	2,819	0,014 625	0,037 91	2,590
0,007 350	0,020 46	2,780			

IV.

<i>m</i>	<i>t</i>	<i>t/m</i>
0,000 442	0,001 480	3,24
0,001 051	0,003 355	3,14
0,002 229	0,006 774	3,040

ZnSO_4 .

I.			II.		
m	t	t/m	m	t	t/m
0,000 286 3	0,000 808	3,467	0,000 135 9	0,000 501	3,75
0,000 597 3	0,001 964	3,340	0,000 398 8	0,001 887	3,475
0,001 081	0,003 500	3,276	0,000 916 0	0,003 071	3,351
0,001 853	0,005 825	3,173	0,001 695	0,005 462	3,225
0,002 850	0,008 679	3,083	0,002 776	0,008 578	3,090
0,004 019	0,011 915	3,010	0,004 412	0,013 088	2,965
0,005 160	0,014 99	2,931	0,006 510	0,018 62	2,861
0,006 259	0,017 86	2,886	0,009 952	0,027 40	2,751
			0,013 91	0,037 01	2,661

 MgSO_4 .

I.			II.		
m	t	t/m	m	t	t/m
0,000 524	0,001 070	3,311	0,000 199 2	0,000 679 5	3,41
0,000 744	0,002 417	3,260	0,000 674 9	0,002 221	3,261
0,001 669	0,005 305	3,180	0,001 351 3	0,004 311	3,190
0,002 947	0,009 044	3,068	0,002 381	0,007 382	3,100
0,004 512	0,013 445	2,977	0,003 960	0,012 26	3,092
0,007 720	0,022 09	2,861	0,008 356	0,023 77	2,820
0,012 69	0,034 63	2,730	0,012 56	0,033 96	2,716

 NiSO_4 .

I.			II.		
m	t	t/m	m	t	t/m
0,000 197 1	0,000 668	3,385	0,000 166	0,000 613	3,70
0,000 534 5	0,001 813	3,395	0,000 444	0,001 583	3,57
0,001 075	0,003 560	3,316	0,000 936	0,003 194	3,413
0,001 626	0,005 306	3,267	0,001 650	0,005 390	3,264
0,002 350	0,007 499	3,189	0,003 101	0,009 82	3,164
0,003 315	0,010 313	3,113	0,005 285	0,015 61	2,956
0,005 790	0,017 28	2,983	0,009 160	0,025 88	2,825
0,008 807	0,025 53	2,900	0,013 10	0,035 85	2,755

III.			IV.		
<i>m</i>	<i>t</i>	<i>t/m</i>	<i>m</i>	<i>t</i>	<i>t/m</i>
0,000 204	0,000 744	3,65	0,000 173	0,000 611	3,55
0,000 599	0,002 110	3,523	0,000 486 1	0,001 685	3,461
0,001 378	0,004 596	3,353	0,000 997 7	0,003 393	3,400
0,002 913	0,009 37	3,219			
0,070 24	0,020 91	2,975			

CdSO₄.

I.

<i>m</i>	<i>t</i>	<i>t/m</i>
0,000 238 8	0,000 841 7	3,526
0,000 704 3	0,002 358	3,341
0,001 511	0,004 817	3,185
0,002 685	0,008 189	3,055
0,006 560	0,018 58	2,836
0,011 51	0,030 94	2,683
0,019 50	0,049 57	2,541
0,031 20	0,075 56	2,421

NaCl.

I.

II.

<i>m</i>	<i>t</i>	<i>t/m</i>	<i>m</i>	<i>t</i>	<i>t/m</i>
0,000 305 4	0,001 062	3,477	0,000 404	0,001 348	3,337
0,000 807 4	0,002 833	3,510	0,000 839	0,002 972	3,543
0,001 386	0,004 931	3,560	0,002 127	0,007 635	3,590
0,002 160	0,007 755	3,589	0,003 746	0,013 45	3,590
0,003 326	0,011 92	3,582	0,004 639	0,016 70	3,599
0,004 723	0,016 87	3,588	0,006 237	0,022 52	3,616
0,006 095	0,021 94	3,597	0,009 130	0,033 19	3,632
0,007 450	0,027 01	3,624			
0,008 785	0,031 75	3,614			

III.

<i>m</i>	<i>t</i>	<i>t/m</i>
0,000 237	0,000 817	3,45
0,000 667	0,002 340	3,59
0,001 789	0,006 403	3,58
0,003 470	0,012 55	3,617
0,006 945	0,025 43	3,665
0,012 23	0,044 23	3,614
0,018 55	0,066 58	3,590
0,024 98	0,089 17	3,573

HCl.

I.

II.

<i>m</i>	<i>t</i>	<i>t/m</i>	<i>m</i>	<i>t</i>	<i>t/m</i>
0,000 103	0,000 308	2,98	0,000 062 0	0,000 163	2,62
0,000 360 3	0,001 180	3,27	0,000 195 8	0,000 661	3,05
0,000 841 5	0,003 020	3,567	0,000 362 4	0,001 28	3,52
0,001 994 3	0,007 286	3,658	0,000 796 9	0,002 845	3,575
0,003 909	0,014 23	3,640	0,001 569 7	0,005 721	3,649
0,008 500	0,031 25	3,680	0,003 050	0,011 21	3,680
0,017 03	0,061 10	3,590	0,006 954	0,025 46	3,662
			0,013 495	0,049 07	3,639

H₂SO₄.

KOH.

I.

I.

<i>m</i>	<i>t</i>	<i>t/m</i>	<i>m</i>	<i>t</i>	<i>t/m</i>
0,000 115	0,000 564	4,94	0,000 082 6	0,000 155 5	1,88
0,000 331 5	0,001 580	5,05	0,000 258 0	0,000 740 7	2,88
0,000 645 8	0,003 179	5,203	0,000 544 1	0,001 679	3,340
0,001 339	0,007 026	5,243	0,001 054 2	0,003 620	3,436
0,002 243	0,011 55	5,152	0,001 950	0,006 858	3,520
0,004 175	0,021 02	5,042	0,003 519	0,012 68	3,607
0,009 42	0,045 07	4,780	0,007 702	0,027 68	3,595
0,016 46	0,075 69	4,598	0,015 50	0,055 53	3,581

Dichloressigsäure.

<i>m</i>	<i>t</i>	<i>t/m</i>
0,000 109 9	0,000 402 6	3,660
0,000 290 8	0,001 092	3,756
0,000 758 1	0,002 880	3,798
0,001 541	0,005 778	3,746
0,003 472	0,012 89	3,709
0,008 105	0,029 19	3,594
0,017 55	0,060 95	3,470

Essigsäure.

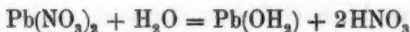
<i>m</i>	<i>t</i>	<i>t/m</i>	<i>t/m</i>
0,000 184 4	0,000 370	2,083	—
0,000 504 7	0,001 048	2,077	—
0,000 951 6	0,001 946	2,046	—
0,001 749	0,003 522	2,016	—
0,003 007	0,006 062	2,016	—
0,005 902	0,011 72	1,9865	1,885
0,010 48	0,020 61	1,9685	1,8815
0,020 82	0,040 35	1,939	1,886
0,035 35	0,068 39	1,235	1,890
0,058 76	0,112 4	1,9145	1,883

Discussion der Resultate.

Beim Ueberblicken der Resultate bestätigen zunächst die fünf *Harnstoffserien* durchaus die Kleinheit der oben discutirten methodischen Fehler, wenn auch hier, wie in den folgenden Serien einzelne Bestimmungen aus der Reihe herausfallen. Das *Raoult'sche Gesetz* gilt, wie vorherzusehen, bis zu den kleinsten Concentrationen (ca. 0,0005 normal). *Rohrzucker* giebt bei den mittleren Concentrationen mit um etwa 0,5 Proc. höheren Werten sehr nahe die Zahl 1,872, welche Raoult als Moleculardepression bei unendlicher Verdünnung findet und zeigt von ca. 0,01 normal ab den bei grösseren Concentrationen stets beobachteten Anstieg der Moleculardepression.

Die zu hohen Werte bei den allerkleinsten Concentrationen dürfen nach der oben gegebenen Discussion den Versuchsfehlern zugeschrieben werden; dagegen war es bei *Alkohol* nicht möglich, zuverlässige Resultate zu erhalten. Während bei den Messungen von Abegg und Loomis die hierfür erhaltenen etwas zu kleinen Werte sich allenfalls aus den Fehlern in der Bestimmung des specifischen Gewichtes der Lösung erklären liessen, ist dies für die hier auftretenden Abweichungen, welche bis 16 Proc. unter den normalen Wert betragen, ausgeschlossen. Auch die Flüchtigkeit des Alkohols konnte keine Störung veranlassen, da die höchstens 10 proc. Mutterlösungen in verschlossenen Wägegläsern ausgewogen wurden. Das Präparat war reines Kahlbaum'sches. Auch die Schwankungen in der Reihe selbst überschreiten die der übrigen bei weitem und sind um so unerklärlicher, als die Einstellungen mit gleicher Sicherheit erfolgten. Immerhin dürfte wenigstens qualitativ dieselbe Anomalie festgestellt sein, wie sie neuerdings von Loomis für Aether¹⁾ gefunden wurde, nämlich eine starke Abnahme der Moleculardepression mit wachsender Verdünnung. Da mit dieser weder ein Ansteigen der Flüchtigkeit noch der eventuellen Association angenommen werden kann, ist eine moleculartheoretische Erklärung vorläufig nicht abzusehen.²⁾

Der Vergleich der folgenden Serien für *Salze von Schwermetallen* zeigt, dass die hydrolytische Dissociation zu gering ist, um durch Gefrierpunktsbestimmung allein sicher nachweisbar zu sein. Während z. B. nach der Formel



die Moleculzahl der *Bleinitratlösung*, soweit diese sich hydrolytisch spaltet, ungefähr im Verhältnis von fünf zu drei zu-

1) E. H. Loomis, l. c.

2) Es sei hier bemerkt, dass Alkohol auch in einer anderen physikalischen Eigenschaft eine Ausnahmestellung einnimmt, indem er (nach L. C. de Coppet, *Compt. rend.* 115. p. 652. 1892) in verdünnter Lösung den Binnendruck (G. Tammann, *Zeitschr. f. physik. Chem.* 11. p. 680. 1893) des Wassers verkleinert, während alle anderen hierauf untersuchten Substanzen denselben vergrößern.

nehmen müsste, fallen die beobachteten Depressionen für Bleinitrat bei den kleinsten Concentrationen mit denen für das sicher unmerklich gespaltene *Baryumnitrat* zusammen. Der einzige Unterschied äussert sich darin, dass die Curve für Bleinitrat gegen höhere Concentrationen rascher abfällt als Bariumnitrat. Genau dasselbe Verhalten zeigt Kupfersulfat gegenüber *Zinksulfat* und *Magnesiumsulfat*. Die beiden letzteren fallen vollständig zusammen.

Auffallenderweise giebt *Nickelsulfat* in allen Concentrationen noch höhere Werte als Zink- und Magnesiumsulfat, während man eher eine dem Kupfersulfat entsprechende Curve erwarten sollte.

Der starke Abfall der Moleculardepression bei *Cadmiumsulfat* weist darauf hin, dass hier schon bei kleinen Concentrationen die bekannte Anomalie, Bildung complexer Salze auftritt, welche Hittorf¹⁾ in der Ueberführungszahl bei grösseren Concentrationen von CdCl_2 und CdJ_2 entdeckt hat.

Ob in einer solchen, nur schwach auftretenden Anomalie auch die Ursache des oben beschriebenen Unterschiedes der Blei- und Kupfersalze gegenüber denen mit starker Base zu suchen ist, dürfte wohl aus den Gefrierpunkten allein nicht zu entscheiden sein. Ebenso ist die Ausnahmestellung des Nickelsulfats schwer zu erklären, da man zunächst nicht feststellen kann, wie sich das Anwachsen der Moleculardepression aus dem der elektrolytischen und der hydrolytischen Dissociation zusammensetzt. Wegen einer Methode zur Ermittlung der Hydrolyse durch Gefrierpunktcurven starker Säuren bei Salzzusatz und damit ausgeführte Versuche muss auf die Dissertation verwiesen werden.

Bei den Reihen der *starken Elektrolyte*, NaCl , HCl , H_2SO_4 , KOH und auch Dichloressigsäure fällt zunächst auf, dass bei den kleinsten Concentrationen die beobachtete Moleculardepression weit unter dem normalen Wert 3,70 für totale Dissociation liegt und überall bei der ca. 0,007 normalen Lösung auf einen Maximalwert ansteigt.

1) W. Hittorf, Pogg. Ann. 98. p. 1. 1856.

Es begegnet gewiss den berechtigten Bedenken, diese Erscheinung im Gegensatz zur Ionentheorie als thatsächlich vorhanden hinzunehmen, jedoch ist es nicht möglich, in Versuchsfehlern eine befriedigende Erklärung zu finden.

Ein constanter Fehler der Methode ist ausgeschlossen im Hinblick auf sämtliche andere Versuche. Um den Einfluss von Verunreinigungen des Wassers festzustellen, wurden die Bestimmungen von NaCl mit verschieden reinem Wasser ausgeführt. Zu der Serie I wurde gewöhnliches destillirtes Wasser verwendet, zur Serie II, wie bei allen übrigen Messungen, aus destillirtem Wasser ausgefrorenes; in diesem Fall mit dem Leitvermögen $1,2 \cdot 10^{-6}$ (abs. Einh.). Ein Unterschied ist nicht zu bemerken. Da ferner die Leitfähigkeit des Wassers $4 \cdot 10^{-6}$ niemals überstieg, berechnet sich nach einer von Kohlrausch gegebenen Regel (indem man das Aequivalentleitvermögen der möglichen Verunreinigungen gleich 100 setzt) ihre Concentration zu $4 \cdot 10^{-5}$ normal. Dem entspricht eine Gefrierpunktsdepression von weniger als $0,0001^\circ$. Man ersieht hieraus, dass die beobachtete Anomalie höchstens so erklärt werden könnte, dass die Unreinigkeiten des Wassers durch die zugesetzte Säure vollständig weggefangen werden. Die höheren Concentrationen werden dadurch natürlich nicht merklich beeinflusst. Ein Einfluss der Silbergefässe ist weniger wahrscheinlich, weil sich dieser wohl auch in einer Inconstanz der Einstellung bei den höheren Concentrationen hätte äussern müssen.

Bei der Bestimmung von Kaliumhydroxyd war wegen des unvermeidlichen Kohlensäuregehaltes des Wassers grösste Vorsicht geboten. Es wurde deshalb das Wasser in dem abgedichteten Gefriergefäss selbst unmittelbar vor der Einführung der Substanz mit durchgesaugter gereinigter Luft gereinigt. Die Kalilauge selbst wurde durch Auflösen metallischen Kaliums in gereinigtem Wasser hergestellt. Da auf diese Weise die von der Kohlensäure des Wassers herrührende Depression höchstens einige Hunderttausendstel Grad betragen konnte, so ist die hier beobachtete Anomalie ebenfalls nicht auf den Einfluss der Kohlensäure allein zurückzuführen.

Ähnliche Anomalien treten bekanntlich für Säuren, Basen und nicht neutral reagirende Salze auch bei den Leitfähig-

keitsbestimmungen auf; mit dem besten für diesen Zweck hergestellten Wasser freilich nur bis zur Concentration 0,001 normal. Man hat sie dahin zu deuten gesucht, dass die Dissociation der im Wasser enthaltenen schwachen Säure (Kohlensäure) oder Base (Ammoniak) zurückgedrängt wird. Dass bei den Gefrierpunkten Chlornatrium dasselbe Verhalten zeigt und die Anomalie bei beiden Methoden auch für das reinste Wasser nicht verschwindet, spricht für die oben gemachte Annahme, dass noch andere Störungen ins Spiel treten. Es ist auch von vornherein nicht zu sagen, ob diese nicht auch die vorher angeführten Bestimmungen der Salze mit zweiwertiger Base beeinflussen und nur wegen des raschen Abfalles der Curven nicht hervortreten.

Für den schwachen Elektrolyt *Essigsäure* ist der Dissoziationsgrad durch das Leitvermögen gegeben. Für die grösseren Concentrationen, wo die genannten Anomalien nicht mehr stören, zeigen die Quotienten $t/m(1+a)$ mit dem Mittelwert 1,885 hinreichende Annäherung an den normalen Wert.

Bei den *starken Elektrolyten* ist bekannt, dass weder die Berechnung des Dissoziationsgrades aus dem Leitvermögen noch aus den Gefrierpunktsbestimmungen das Massenwirkungsgesetz befriedigt. Für die erstere Thatsache findet sich die Erklärung, dass hier das elektrische Leitvermögen kein Maass für den Dissoziationsgrad ist, für die zweite, dass bei den der Gefrierpunktsmessung bisher zugänglichen Concentrationen die Gasgesetze noch nicht gelten.

In einer Gegenüberstellung der oben wiedergegebenen Moleculardepressionen für HCl und NaCl und der aus den Leitfähigkeiten berechneten hat Arrhenius¹⁾ bereits darauf hingewiesen, dass bei den kleinsten Concentrationen kein bedeutender Unterschied zwischen beiden hervortritt und erst allmählich gegen die höheren Concentrationen die Gefrierpunkte — wie dies schon früher bekannt — höhere Werte geben. Das Sinken der Gefrierpunktcurve gegen die kleineren Concentrationen kann jedoch aus der hier auftretenden Anomalie erklärt werden. Falls diese von einem constanten Versuchsfehler herrührt, wäre es also unstatthaft, hieraus eine Annäherung des aus

1) Sv. Arrhenius, Zeitschr. f. physik. Chem. 37. p. 317. 1901.

Gefrierpunkt und Leitfähigkeit berechneten Dissociationsgrades bei grosser Verdünnung abzuleiten.

Da nicht entschieden werden kann, bis zu welchem Bereich diese zweifellos bei den starken Elektrolyten auftretende Unregelmässigkeit von Einfluss ist, so scheint auch die von Jahn¹⁾ an den höheren Concentrationen versuchte Prüfung des Massenwirkungsgesetzes mittels des angegebenen Materiales einiger Unsicherheit unterworfen. Die sehr wünschenswerte Aufklärung über diese Verhältnisse dürfte nur von einer Wiederholung der betreffenden Versuche in geeigneten Glasgefässen mit Platinrührer und unter Verwendung äusserst reinen Wassers zu erhoffen sein.

Zusammenfassung.

Es wurde eine *Methode* angegeben, welche gestattet, kleine Gefrierpunktsdepressionen mit einer Genauigkeit von wenigen Hunderttausendstel Grad zu bestimmen.

Mit dieser Methode wurden untersucht:

I. Niechtelektrolyte.

Bei *Harnstoff* wurde das Raoult'sche Gesetz bis zu den kleinsten Concentrationen (0,0005 normal) bestätigt.

Rohrzucker ergab etwas zu hohe Depressionen und einen Anstieg derselben von der Concentration 0,01 normal ab.

Alkohol ergab unsichere und anomal kleine Werte.

II. Elektrolyte.

Salze von Schwermetallen. Die Gefrierpunktscurven der hydrolysirten Salze fallen bei den kleinen Concentrationen mit denen der nichthydrolysirten zusammen, zeigen jedoch bei den grösseren Concentrationen einen rascheren Abfall.

Starke Elektrolyte ergaben in noch höherem Maass als bei den Leitfähigkeitsbestimmungen in verdünntester Lösung anomal kleine Werte. Bei höheren Concentrationen zeigt sich die Tendenz zu grösseren als der Leitfähigkeit entsprechenden

1) H. Jahn, Zeitschr. f. physik. Chem. 37. p. 493. 1901.

Werten. Das Massenwirkungsgesetz wird für starke Elektrolyte nicht bestätigt.

Die vorliegende Arbeit wurde in den Jahren 1899, 1900 im Institut für physikalische Chemie in Göttingen auf Anregung und unter Leitung von Hrn. Prof. Nernst ausgeführt. Ihm, sowie Hrn. Prof. Abegg, der mich bei der Ausarbeitung der Methode unterstützte, sei auch an dieser Stelle mein herzlichster Dank ausgesprochen.

(Eingegangen 10. Juli 1902.)

3. Ueber das Verhalten einiger Legirungen zum Gesetz von Wiedemann und Franz; von F. A. Schulze.

(Habilitationsschrift.)

Während die reinen Metalle bereits ziemlich eingehend auf ihr Verhalten zum Gesetz von Wiedemann und Franz¹⁾ untersucht sind²⁾, liegen für Legirungen noch wenig systematische Arbeiten vor. Für einige Legirungen ist das Verhältnis

$\frac{\text{Wärmeleitvermögen}}{\text{Elektrische Leitfähigkeit}} = \frac{k}{\alpha}$ bereits von G. Wiedemann³⁾ selbst bestimmt worden, nämlich für Legirungen von Kupfer und Zink, Wismut und Zinn, und für das Rose'sche Metall. Er fand, indem er k und α für Silber gleich 100 setzte:

Legirung	k	α	$\frac{k}{\alpha}$
8 Teile Cu + 1 Teil Zn	27,3	25,5	1,07
6,5 " " + 1 " "	29,9	30,9	0,97
4,7 " " + 1 " "	31,1	29,2	1,07
2,1 " " + 1 " "	25,8	25,4	1,02
3 " Sn + 1 " Bi	10,1	9,0	1,12
1 " " + 1 " "	5,6	4,3	1,30
1 " " + 3 " "	2,7	2,0	1,35
Rose's Metall	4,0	3,2	1,25

Das Gesetz von Wiedemann und Franz ist also für diese Legirungen annähernd erfüllt. Hervorgerufen wurde

1) G. Wiedemann u. R. Franz, Pogg. Ann. 89. p. 498. 1853.

2) Vgl. u. a. besonders: F. Neumann, Ann. de chim. et phys. (3) 66. p. 183. 1862; R. Lenz, Bulletin de l'Académie de St. Pétersbourg 14. p. 54. 1870; H. F. Weber, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin p. 459. 1880; G. Kirchhoff u. G. Hansemann, Wied. Ann. 9. p. 1. 1880; 13. p. 406. 1881; L. Lorenz, Wied. Ann. 13. p. 422. 1881; J. Michell, Trans. Roy. Soc. Edinb. p. 535. 1887; F. Kohlrausch, Wied. Ann. 33. p. 678. 1888; A. Berget, Journ. de Phys. (2) 9. p. 135. 1890; L. Cellier, Inaug.-Diss. Zürich 1896; E. Grüneisen, Ann. d. Phys. 3. p. 71. 1900; W. Jaeger u. H. Diesselhorst, Wissensch. Abhandl. d. Phys.-Techn. Reichsanst. 3. p. 269. 1900; Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin p. 719. 1899.

3) G. Wiedemann, Pogg. Ann. 108. p. 293. 1859.

diese Untersuchung von Wiedemann durch eine Abhandlung von C. Calvert und R. Johnson¹⁾ über die Wärmeleitung einer Anzahl von reinen Metallen und Legirungen. Die von diesen beiden Physikern erhaltenen relativen Werte der Wärmeleitung der reinen Metalle stimmten nun in keiner Weise mit den von Wiedemann und Franz ermittelten; z. B. war der für Wismut gefundene Wert ca. 3 mal so gross etc. Es lassen sich nun aber gegen die von Calvert und Johnson angewandte Methode grosse Bedenken erheben, die schon von G. Wiedemann eingehend dargelegt sind. Nur die Reihenfolge der gefundenen Wärmeleitfähigkeiten wird bei den Untersuchungen von Calvert und Johnson im allgemeinen richtig sein. Die späteren Arbeiten über Wärmeleitung haben die Resultate von Wiedemann und Franz vollständig quantitativ bestätigt, während sich die von Calvert und Johnson erhaltenen Werte als nicht richtig erwiesen haben. Man könnte sonst leicht ihr grosses Zahlenmaterial für eine ganze Reihe von Legirungen zu Aufschlüssen über das Verhalten der Legirungen zu dem Gesetz von Wiedemann und Franz verwerten, indem man es mit den Zahlen combinirt, die Matthiessen für die elektrische Leitfähigkeit einer grossen Zahl von Legirungen erhalten hat.

Im Folgenden mögen noch die bisher gefundenen Werte von k/α für Legirungen zusammengestellt werden. Es sei dabei bemerkt, dass davon Abstand genommen ist, alle Zahlen auf dieselben Einheiten umzurechnen, da dies zum Teil unthunlich, zum Teil unmöglich war. Es ist aber zum Vergleich stets der Wert von k/α für ein reines Metall in den betreffenden Einheiten in Klammern hinzugefügt.

Am zahlreichsten sind Angaben über k/α für Messing vorhanden, wo sich das Gesetz von Wiedemann und Franz stets bestätigt hat. Es fanden

G. Wiedemann u. Franz (l. c.)	$\frac{k}{\alpha} = 1,074$ (= 1 für Ag)
L. Lorentz (l. c.)	= 1562 für rotes Messing
	= 1617 für gelbes Messing
	(= 1574 für Cu)
F. Neumann (l. c.)	= 19,8 für Messing (= 17,6 für Cu)
H. F. Weber (l. c.)	= 1968 für Messing (= 2007 für Cu)

1) C. Calvert u. R. Johnson, Phil. Trans. Roy. Soc. London 148. p. 349. 1853.

Für Wood'sches Metall ist nach H. F. Weber (l. c)

$$\frac{k}{\alpha} = 1379 \text{ (= 2009 für Cu).}$$

Auch für Neusilber liegen einige Messungen vor:

L. Lorentz	$\frac{k}{\alpha}$	= 1858 für Neusilber (= 1574 für Cu)
F. Neumann	"	= 19,9 " " (= 17,6 für Cu)
Michell	"	= 1,11 " " (= 1,00 für Cu)

Für zwei Wismut-Zinnlegierungen ist k/α durch Messungen von v. Ettingshausen und Nernst¹⁾ bekannt. Sie fanden

Reines Wismut	$\frac{k}{\alpha}$	= 3500
99,05 Bi + 0,95 Sn	"	= 3200
93,86 Bi + 6,14 Sn	"	= 3100

Auffällig ist hier der hohe Wert von k/α für reines Wismut, der erheblich von den sonst gefundenen, ca. 2300, abweicht. Für die Legierungen ergibt sich der annähernd gleiche Wert wie für das reine Metall. van Aubel²⁾ findet:

$$\begin{aligned} \frac{k}{\alpha} &= 1,28 \text{ für Aluminiumbronze} \\ &= 2,02 \text{ für Constantan} \\ &= 2,24 \text{ für Nickenleisen} \\ &= 1,00 \text{ für Cadmium} \end{aligned}$$

Nach Jaeger u. Diesselhorst (l. c.) ist:

$$\begin{aligned} \left(\frac{k}{\alpha}\right)_{150} \cdot 10^3 &= 757 \text{ für Rotguss (85,7 Cu, 7,2 Zn, 6,4 Sn, 0,6 Ni)} \\ &= 914 \text{ für Manganin (84 Cu, 4 Ni, 12 Mn)} \\ &= 1106 \text{ für Constantan (60 Cu, 40 Ni)} \\ &= 699 \text{ für reines Ni} \end{aligned}$$

E. Grüneisen hat folgende Resultate erhalten:

$$\begin{aligned} \frac{k}{\alpha} \cdot 10^{-1} &= 178 \text{ bei Cu mit Spuren As} \\ &= 198 \text{ " " mit viel As} \\ &= 173 \text{ " Fe mit 0,1 C, 0,1 Si, Mn etc.} \\ &= 203 \text{ " " " 0,6 " 0,4 " " " } \\ &= 201 \text{ " " " 1,0 " 0,2 " " " } \\ &= 216 \text{ " " " 1,5 " 0,3 " " " } \\ &= 243 \text{ " Nickelkupfer (54 Cu, 46 Ni)} \\ &= 163 \text{ " reinem Cu} \end{aligned}$$

1) A. v. Ettingshausen u. W. Nernst, Wied. Ann. 33. p. 487. 1888.

2) E. v. Aubel u. R. Paillet, Journ. de phys. (3) 4. p. 522. 1895.

Nach allem ist zu vermuten, dass für ganz reines Eisen der Wert von k/κ nicht erheblich abweicht von dem Werte den k/κ für die anderen reinen Metall, hat.

A. Rietzsch¹⁾ hat eine Anzahl von Kupfer-Phosphor- und Kupfer-Arsenmischungen mit einem Gehalt bis zu 5 Proc. P, bez. As auf Wärme- und Elektrizitätsleitung hin untersucht und gefunden, dass für diese im Gegensatz zu den meisten Metalllegirungen k/κ einen kleineren Wert hat, als für reines Kupfer. Ist für reines Kupfer $k/\kappa = 1$ gesetzt, so ist nach Rietzsch z. B. für

$$\text{Cu} + 5 \text{ Proc. As} \quad \frac{k}{\kappa} = 0,98$$

$$\text{Cu} + 5,25 \text{ Proc. P} \quad \frac{k}{\kappa} = 0,71$$

Es ergibt sich also, dass auch für Legirungen im grossen und ganzen das Gesetz von Wiedemann und Franz erfüllt ist, dass jedoch im allgemeinen der Wert von k/κ bei Metalllegirungen ein wenig, bei manchen sogar recht erheblich grösser ist, als für reine Metalle, nur die Mischungen von Kupfer mit Arsen und Phosphor machen hiervon eine Ausnahme. Systematische, den Einfluss des Mischungsverhältnisses berücksichtigende Versuche über den Wert von k/κ bei Legirungen von Metallen miteinander in beliebigem Mischungsverhältnis liegen nach der gegebenen Zusammenstellung bisher erst in geringer Zahl vor.

In der vorliegenden Arbeit ist versucht worden, einiges zur Ausfüllung dieser Lücke beizutragen.

Der leitende Grundgedanke ist dabei der folgende gewesen:

Wenn das Gesetz von Wiedemann und Franz allgemein annähernd erfüllt wäre, so müsste die Abhängigkeit der thermischen Leitfähigkeit vom Mischungsverhältnis der beiden Komponenten dieselbe oder wenigstens annähernd dieselbe sein wie diejenige der elektrischen Leitfähigkeit. Die elektrische Leitfähigkeit ist nun für viele Legirungen gut bekannt; namentlich Matthiessen²⁾ verdankt man die ersten sehr sorgfältig ausgeführten Messungen für eine sehr grosse Anzahl von

1) A. Rietzsch, Ann. d. Phys. 3. p. 403. 1900.

2) A. Matthiessen, Pogg. Ann. 110. p. 190. 1860.

Legierungen. Durch diese Messungen hat Matthiessen gefunden, dass alle Metalle in zwei Gruppen zerfallen:

Gruppe I: Zink, Zinn, Blei, Cadmium.

Gruppe II: Wismut, Antimon, Eisen, Aluminium, Gold, Kupfer, Silber, Platin, Palladium.

Die Legierungen von je zwei Metallen der Gruppe I untereinander leiten die Elektrizität im Verhältnis ihrer relativen Volumina. Die Legierungen von je zwei Metallen der Gruppe II untereinander, oder eines Metalles der Gruppe II mit einem Metall der Gruppe I leiten die Elektrizität *nicht* im Verhältnis ihrer Volumina, sondern stets *schlechter*. Bei den Legierungen der Gruppe I lässt sich also die Leitfähigkeit für Elektrizität aus der Mischungsregel berechnen, nicht aber bei den Legierungen aus Gruppe II oder aus II und I.

Wenn das Gesetz von Wiedemann und Franz allgemein auch für Metalllegierungen gültig bliebe, so müssten auch in Bezug auf die Wärmeleitfähigkeit alle Metalle in dieselben beiden Gruppen zerfallen.

Die oben angeführten Bestimmungen von k/α bei Legierungen lassen bereits erkennen, dass bei den Kupfer-Zink-, sowie den Wismut-Zinnlegierungen und den Kupfer-Phosphor- und Kupfer-Arsenmischungen auch die Wärmeleitfähigkeit stets in gleichem Maasse herabgesetzt ist wie die elektrische, sodass k/α stets annähernd denselben Wert behält.

Nach den schon oben erwähnten Versuchen von Calvert und Johnson würde bei Legierungen von Blei und Zinn, sowie von Zink und Zinn die Wärmeleitfähigkeit die nach der Mischungsregel berechnete sein, dagegen bei den anderen von ihnen untersuchten Legierungen, Blei-Antimon, Antimon mit Wismut, Kupfer und Zinn, Kupfer und Zink, stets kleiner als nach der Mischungsregel berechnet. Diese Versuche können jedoch, wie schon gesagt, nur den Anspruch darauf machen, die Reihenfolge der Wärmeleitungen richtig zu geben; zahlenmässig sind sie nicht zu verwerten, sodass ihre gefundene Regel noch der Bestätigung bedarf.

In der vorliegenden Arbeit sind auf Wärmeleitung und Elektrizitätsleitung hin untersucht: 1. Legierungen von Wismut und Blei, 2. Legierungen von Wismut und Zinn, 3. Legierungen von Zink und Zinn.

Die beiden ersten Legirungen, die also Gruppe II angehören, sind deshalb gewählt, weil bei diesen nach den Untersuchungen von Matthiessen die beobachtete elektrische Leitfähigkeit von der nach der Mischungsregel berechneten in besonders merkwürdiger Weise abweicht, indem die elektrische Leitfähigkeit des reinen Wismuts durch ganz geringe Zusätze von Blei bez. Zinn sofort stark heruntergedrückt wird bis auf ein Minimum von ca. $\frac{1}{4}$ der Leitfähigkeit des reinen Wismuts bei einem Gehalt von 1,76 Vol.-Proc. Blei bez. 0,85 Vol.-Proc. Zinn, um von da allmählich bei weiterem Zusatz von Blei bez. Zinn wieder ziemlich regelmässig bis auf die Leitfähigkeit des reinen Bleis, bez. reinen Zinns zu wachsen. Es war demnach auch ein besonders abweichender Gang des Wärmeleitvermögens zu erwarten. Im ersten Abschnitt der Arbeit sollen die Messungen der Wärmeleitung, im zweiten die Bestimmungen der elektrischen Leitfähigkeit beschrieben werden.

I.

Messung der Wärmeleitfähigkeit.

Zur Messung der Wärmeleitfähigkeit wurde die „Isothermenmethode“ von W. Voigt¹⁾ benutzt, welche es gestattet, die relative Wärmeleitfähigkeit sehr geringer Substanzmengen verhältnismässig genau und bequem zu bestimmen. Nach dieser Methode werden die auf ihre relativen Wärmeleitfähigkeiten zu untersuchenden Körper in Plattenform gebracht und an einer Kante aneinandergelötet. Fliesst ein Wärmestrom durch diese zusammengesetzte Platte, so besteht die Beziehung

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\operatorname{tg} \varphi_2},$$

wenn k_1, k_2 die bez. Wärmeleitfähigkeiten, und φ_1 bez. φ_2 die Winkel sind, welche an einem Punkt der Berührungslinie die Isothermen mit der Richtung der Trennungslinie bilden.

Zur Erkennung der Isothermen wurde, wie von Voigt, Elaidinsäure genommen (Schmelzpunkt 44—45°), die sich durch sehr scharfe klare Schmelzcurven, die beim Erstarren sehr deutlich sichtbar bleiben, vor allen anderen Substanzen auszeichnet.

1) W. Voigt, Wied. Ann. 64. p. 95. 1898.

Die Metalle Wismut, Blei, Zink, Zinn wurden als chemisch rein von E. Merck in Darmstadt bezogen, in dem gewünschten Mischungsverhältnis abgewogen, in Chamottetiegeln zusammengeschmolzen und in Form rechtwinklig dreieckiger Platten von den Kathetenlängen 32 mm und 20 mm gegossen. Jede solche Platte wurde dann mit einer gleich grossen Platte aus einem der reinen Metalle an den Hypotenusenseiten zusammengelötet, und diese so hergestellte Platte auf überall gleiche Dicke von ca. 1,5 mm abgedreht. Die Platte wurde dann mit Elaidinsäure überzogen (ebenfalls von Merck bezogen) und sodann die Schmelzcurve erzeugt. Es wurde dazu der speciell für diese Messung dienende kleine, von Fuess in Steglitz bezogene Apparat benutzt. Derselbe besteht aus einem Kupferblock, der an einem Stativ in beliebiger Höhe befestigt werden kann, und an dessen Ende ein Sammtklotz vorgelegt ist, auf den die zu untersuchende Platte kommt, sodass man sie bequem an den von unten mit einem Bunsenbrenner erwärmten Kupferklotz anpressen kann. War die Schmelzcurve gut ausgebildet, so wurden ihre Winkel mit der Trennungslinie gemessen, indem die Platte auf die Mitte der drehbaren Scheibe eines Kohlrausch'schen Sinuselektrometers gelegt und dicht über sie ein dünner Faden gespannt wurde, der durch den Mittelpunkt des drehbaren Kreises ging. Die Platte wurde so gelegt, dass der Punkt der Trennungslinie, in dem die beiden Schmelzlinien zusammenstiessen, in den Mittelpunkt des drehbaren Kreises zu liegen kam. Dann wurde der drehbare Kreis, auf dem die Platte lag, so gedreht, dass einmal die Trennungslinie der beiden Substanzen, dann die Schmelzlinien mit der Richtung des feststehenden Fadens zusammenfielen, und die entsprechenden Winkel, um die hierbei gedreht werden musste, an dem äusseren feststehenden getheilten Kreisring des Sinuselektrometers abgelesen. Die Genauigkeit der Einzelablesung betrug im Durchschnitt etwa $\frac{1}{4}$ Grad, was einen Fehler von ca. 2 Proc. ausmacht; durch häufige Wiederholung der Messung wurde natürlich dieser Fehler bedeutend herabgedrückt. Bei der einzelnen Schmelzcurve wurde 5—10 mal abgelesen, und dann an derselben Platte je nach Erfordernis noch 5—10 mal die Curve neu hergestellt und jede wieder für sich mehreremal gemessen. Meist wurde die Schmelzcurve

in der Mitte der Platte erzeugt. Im Folgenden seien nun die Ergebnisse dieser Messungen mitgeteilt. Die Einheiten für k sind dabei g-cal, cm, sec. Als Werte von k sind für die reinen Metalle nach den Messungen von Jaeger und Diesselhorst angenommen:

Substanz	$k \left(\frac{\text{g-cal}}{\text{cm}^2 \cdot \text{sec.}} \right)$
Blei	0,08
Wismut	0,019
Zink	0,26
Zinn	0,15

Es wurde übrigens auch das Verhältnis der Wärmeleitfähigkeiten der reinen Substanzen nach der Isothermenmethode bestimmt, um eine Gewähr dafür zu haben, dass man es wirklich mit reinen Substanzen zu thun hatte, und die Anwendung der angegebenen Zahlen gerechtfertigt war. Es fand sich:

	Gefunden	Berechnet (aus obigen Zahlen)
$k_{\text{Pb}} : k_{\text{Bi}}$	4,30	4,21
$k_{\text{Zn}} : k_{\text{Sn}}$	1,68	1,73

Für die übrigen noch möglichen Combinationen dieser vier Metalle untereinander wurde das Verhältnis der Wärmeleitfähigkeiten nicht bestimmt, da es wegen seines hohen Wertes nach dieser Methode nicht genügend genau hätte gemessen werden können. Ist nämlich das Verhältnis der Leitfähigkeiten sehr gross, so werden die zu messenden Winkel sehr klein, bez. sehr gross, sodass ein geringer Messfehler einen grossen Fehler im Resultat bedingt.

In den folgenden Tabellen stehen in der ersten Columne der Gehalt der Legirung am Zusatzmetall in Volum-Procenten, in der zweiten der experimentell gefundene Wert des Verhältnisses k/k' , wo k immer die Wärmeleitung des reinen Metalles, k' die der Legirung ist. In der dritten Columne ist die Wärmeleitung k' angegeben, wie sie sich aus dem gefundenen Wert von k/k' und dem angenommenen Wert von k berechnet. In der vierten Columne endlich sind unter \bar{k} die

Wärmeleitungsfähigkeiten angegeben, wie sie sich aus dem Mischungsverhältnis der beiden legirten Metalle, auf das Volumen bezogen, berechnen, falls man die einfache Mischungsregel als gültig annimmt.

Erste Versuchsreihe:

Wismut legirt mit Blei, verglichen mit reinem Blei.

Nr.	Vol.-Proc.		$\frac{k_{\text{Pb}}}{k'}$	$k'_{\text{gef.}}$	$\bar{k}_{\text{ber.}}$
	Pb	Bi			
0	0	100	4,30	0,0186	0,0190
1	0,43	99,57	4,21	0,0188	0,0193
2	1,53	98,47	6,17	0,0129	0,0199
3	3,53	96,47	6,20	0,0129	0,0212
4	8,53	91,65	4,37	0,0183	0,0241
5	42,30	57,70	2,75	0,0291	0,0448
6	74,77	25,23	1,71	0,0468	0,0646
7	94,41	5,59	1,08	0,0741	0,0746
	[100]	[0]	[1,00]	[0,080]	[0,080]

Unter Nr. 0 sind hier noch die Ergebnisse der Messungen an den reinen Metallen mit aufgeführt, und in die letzte Reihe ist der Vollständigkeit halber noch reines Blei mit aufgenommen.

Das Ergebnis ist also, dass die Wärmeleitfähigkeit des Wismuts durch geringe Zusätze von Blei stark heruntergedrückt wird, um dann allmählich bei weiterem Bleizusatz bis auf die Leitfähigkeit des reinen Bleis zu steigen. Die Leitfähigkeit der Wismut-Bleilegierungen ist also stets kleiner, als sich nach der Mischungsregel ergeben würde.

Da das Verhältnis der Wärmeleitung von reinem Blei zu der der Legierungen von Wismut mit wenig Blei gross ist, daher auch die gemessenen Winkel verhältnismässig sehr gross, bez. sehr klein, also, wie schon angeführt, die Genauigkeit von k/α bei diesen Legierungen nicht sehr gross ist, so war es erwünscht, die Wärmeleitung dieser wenig Blei enthaltenden Wismut-Bleilegierungen auch noch mit der eines reinen Metalles zu vergleichen, dessen Wärmeleitungsfähigkeit nicht so sehr von derjenigen dieser Legierungen abweicht — um so mehr, als

ja gerade diese Legierungen durch ihre extrem kleine Wärmeleitfähigkeit ein besonderes Interesse bieten. Es wurden darum noch einige wenig Blei enthaltende Wismut-Bleilegierungen hergestellt und in der geschilderten Weise ihre Wärmeleitfähigkeit mit der von reinem *Wismut* verglichen. Es ergab sich folgendes:

Zweite Versuchsreihe:

Wismut mit Blei legirt, verglichen mit reinem Wismut.

Vol.-Proc.		$\frac{k_{Bi}}{k'}$	$k'_{gef.}$	$k'_{ber.}$
Pb	Bi			
0,76	99,24	1,10	0,0173	0,0195
1,65	98,44	1,58	0,0119	0,0199
2,69	97,31	1,62	0,0117	0,0206
8,29	91,71	1,14	0,0166	0,0242

Auch aus diesen Messungen ergibt sich also die Wärmeleitung der Legierungen von Wismut mit wenig Blei kleiner als die des reinen Wismuts.

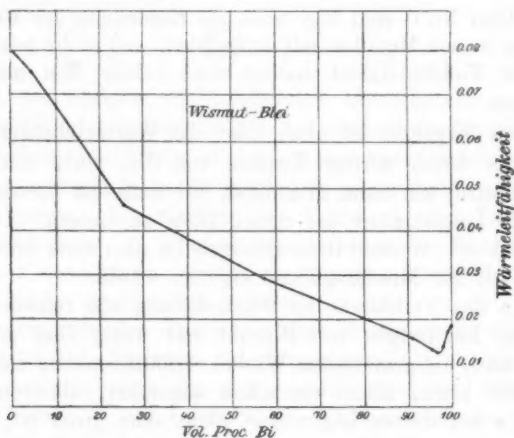


Fig. 1.

Fig. 1 gibt die Resultate der ersten und zweiten Versuchsreihe wieder.

Dritte Versuchsreihe:

Wismut mit Zinn legirt; die Legierungen mit wenig Zinn verglichen mit reinem Wismut, die Legierungen mit viel Zinn verglichen mit reinem Blei.

Nr.	Vol.-Proc.		$\frac{k_{\text{Bi}}}{k'}$	$k'_{\text{gef.}}$	$k'_{\text{ber.}}$
	Bi				
0	100	0	—	—	0,019
1	99,54	0,46	1,35	0,014	0,0196
2	99,05	0,95	1,50	0,0126	0,0201
3	97,13	2,87	1,73	0,0110	0,0227
4	90,26	9,74	1,51	0,0126	0,0317
5	76,13	23,87	0,68	0,0279	0,0503
			$\frac{k_{\text{Pb}}}{k'}$		
6	49,90	50,10	1,60	0,050	0,0848
7	24,93	75,07	0,89	0,088	0,117
8	4,27	95,73	0,60	0,134	0,144
	0	100	—	—	0,15

Es ergibt sich also hier ein ganz ähnlicher Verlauf der Wärmeleitung wie bei den Wismut-Bleilegierungen (Fig. 2). Dass in dieser Versuchsreihe nicht stets das gleiche Vergleichsmetall genommen wurde, hat seinen Grund wieder darin, dass es zu vermeiden ist, zu weit in der Wärmeleitfähigkeit voneinander abstehende Substanzen nach der angewandten Methode miteinander zu vergleichen, weil sonst die Genauigkeit eine zu geringe wird.

Vierte Versuchsreihe:

Zinn mit Zinn legirt, verglichen mit reinem Zinn.

Nr.	Vol.-Proc.		$\frac{k_{\text{Sn}}}{k'}$	$k'_{\text{gef.}}$	$k'_{\text{ber.}}$
	Zn	Sn			
0	0	100	—	0,15	0,15
1	8,93	91,07	0,95	0,157	0,160
2	12,73	87,22	0,93	0,16	0,164
3	23,34	76,66	0,84	0,178	0,175
4	36,95	63,05	0,81	0,186	0,191
5	53,83	46,17	0,70	0,211	0,209
6	70,19	29,81	0,67	0,222	0,227
	100	0	0,59	0,25	0,26

Im Gegensatz zu den Legierungen Wismut-Blei und Wismut-Zinn ergibt sich also bei den Zinn-Zinnlegierungen, dass die Wärmeleitungsfähigkeiten der Legierungen zwischen denjenigen der reinen Metalle liegen und annähernd mit den nach der

Mischungsregel berechneten Wärmeleitfähigkeiten übereinstimmen. Es stimmt dieses Resultat mit den oben angeführten Untersuchungen überein, die Calvert und Johnson über die Wärmeleitfähigkeit von Zink-Zinnlegirungen angestellt haben.

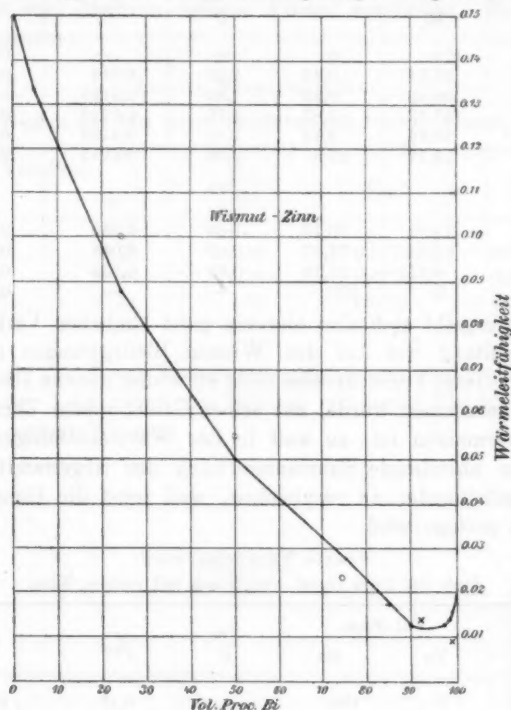


Fig. 2.

Die von G. Wiedemann erhaltenen Werte sind durch Kreise, diejenigen von Ettingshausen und Nernst durch Kreuze bezeichnet (umgerechnet auf $k_{Bi} = 0,019$).

Die erhaltenen Resultate sind dargestellt in Fig. 3.

In anschaulicher Weise lassen sich die erhaltenen qualitativen Ergebnisse, dass nämlich die Wärmeleitung der wenig Blei bez. wenig Zinn enthaltenden Wismut-Blei- und Wismut-Zinnlegirungen kleiner ist, als diejenige des reinen Wismuts, dass andererseits die Wärmeleitung von Zink-Zinnlegirungen

stetig von der des Zinns zu derjenigen des Zinks steigt, nachweisen, wenn man alle aufgeführten einzelnen Messungen gleichzeitig an ein und derselben, aus allen Legierungen zusammengesetzten Platte vornimmt. Zu diesem Zwecke wurden drei Platten hergestellt, die erste für die Wismut-Bleilegierungen, die zweite für die Wismut-Zinnlegierungen, die dritte für die Zink-Zinnlegierungen. Jede derselben bestand aus rechteckigen, ca. 1,5 mm dicken Platten von den Kantenlängen 5 mm und

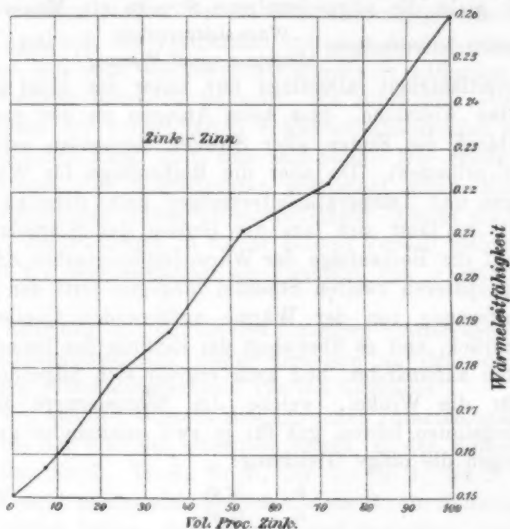


Fig. 3.

50 mm, die aus den einzelnen Legierungen und den reinen Metallen hergestellt und an den langen Kanten aneinander gelötet waren, und zwar in der Reihenfolge, dass an einem Ende sich das eine reine Metall befand, darauf dann die Legierungen mit wachsendem Gehalt an dem anderen Metall, am anderen Ende dann das andere reine Metall. Die so vorgerichtete Platte wurde mit Elaidinsäure bestrichen, mit der einen Kante, die senkrecht zu den Trennungslinien der einzelnen Stücke lag, gegen den erwärmten Kupferblock gepresst und die Schmelzcurve beobachtet.

Man hat hier zwei Stadien zu unterscheiden. Im ersten

Stadium, kurz nach dem Anlegen der Platte an den erwärmten Block, geht, so lange sich die aneinander grenzenden Streifen noch nicht sehr beeinflussen, der Vorgang so vor sich, als ob die einzelnen Legierungen voneinander getrennt wären. Je weiter in diesem Stadium die Schmelzung in einem bestimmten Moment vorgeschritten ist, desto grösser ist im allgemeinen das Wärmeleitvermögen des betreffenden Streifens (analog dem bekannten Demonstrationsversuch von Ingenhouss). In Wirklichkeit giebt die abgeschmolzene Strecke ein Maass für das Temperaturleitvermögen $\left(\frac{\text{Wärmeleitvermögen}}{\text{Dichte} \times \text{specif. Wärme}} \right)$, nicht für die Wärmeleitfähigkeit (allerdings nur unter der nicht ganz zutreffenden Annahme, dass beim Anlegen an den erwärmten Kupferblock die Enden aller Streifen momentan seine Temperatur erlangen). Da aber die Reihenfolge für Wärmeleitvermögen und Temperaturleitvermögen nicht dieselbe zu sein braucht, so lässt sich aus der Grösse der Schmelzstrecken nicht auf die Reihenfolge der Wärmeleitfähigkeiten schliessen.

Im späteren zweiten Stadium hingegen tritt der Einfluss der Entfernung von der Wärme zuführenden Quelle immer mehr zurück, und es überwiegt der Einfluss der benachbarten Schichten aufeinander; und zwar ergiebt sich folgendes:

Für die Winkel, welche die Schmelzcurve mit den Trennungslinien bilden, gilt für je zwei aneinander grenzende Legierungen die obige Gleichung:

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\operatorname{tg} \varphi_2},$$

oder

$$\frac{k_1}{\operatorname{tg} \varphi_1} - \frac{k_2}{\operatorname{tg} \varphi_2} = 0.$$

Werden die einzelnen Streifen immer schmäler, so lässt sich diese Gleichung im Grenzfall schreiben

$$d \left(\frac{k}{\operatorname{tg} \varphi} \right) = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{k}{\operatorname{tg} \varphi} = \text{const.};$$

oder wenn man mit y die Richtung der Trennungslinien, mit x die dazu senkrechte bezeichnet:

$$(1) \quad k \frac{dy}{dx} = \text{const.}$$

Die Gleichung den Isothermalcurve würde also sein:

$$y = \text{const.} \int \frac{dx}{k} + \text{const.},$$

wo k als Function von x zu denken ist. Durch Differentiation von (1) kommt

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{\text{const. } dk}{k^3 \frac{dx}{dx}}$$

Die Schmelzcurve hat demnach an derjenigen Stelle, wo die Wärmeleitung ein Minimum bez. Maximum ist, einen *Wendepunkt*, nicht etwa ein Minimum bez. Maximum wie im anfänglichen Zustand. Es möchte zunächst paradox erscheinen, dass hiernach an Stellen, wo die Wärmeleitung grösser ist als in der Umgebung, die Temperatur trotzdem kleiner sein kann, als an der von dem Wärmeeinfluss gleichweit entfernten Stelle einer schlechter leitenden Schicht. Es rührt dies eben von dem Einfluss der benachbarten Schichten aufeinander her.

Umgekehrt kann man nun schliessen: Die Stelle eines Wendepunktes der Schmelzcurve entspricht einem Minimum bez. Maximum der Wärmeleitungsfähigkeit. Bleibt die Krümmung der Schmelzcurve in ihrem ganzen Verlauf gleichsinnig, so nimmt die Wärmeleitung als Function von x ständig ab oder zu.

Im Einklang mit den an den einzelnen Platten ermittelten Wärmeleitungsconstanten zeigte sich nun an den aus allen Legirungen zusammengesetzten Platten folgendes:

Bei der aus den Wismut-Bleilegirungen zusammengesetzten Platte, bei der also die einzelnen Stücke in der Reihenfolge: reines Blei, Nr. 7, Nr. 6, Nr. 5, Nr. 4, Nr. 3, Nr. 2, Nr. 1 reines Wismut aneinander grenzten, schritt die Schmelzcurve an den beiden Seiten, dem Wismut- und besonders dem Bleiende schneller vor als in den am Wismut gelegenen Schichten; bald darauf aber, je mehr sich der zweite Zustand herstellte, änderte die Curve ihre Gestalt, verlor das Minimum und erhielt schliesslich die Form einer vom Blei- nach dem Wismutende stetig fallenden Curve, die aber einen Wendepunkt an derselben Stelle zeigte, wo vorher das Minimum der Schmelzcurve gewesen war. Dieser Wendepunkt ist gerade in der Schicht, die nach den früheren Versuchen die kleinste Wärmeleitfähigkeit hat. Die Photographie (Fig. 4) zeigt die Curve deutlich (die obere Curve ist durch Erwärmen von b her entstanden). Zur besseren Orientirung ist noch eine schematische Zeichnung daneben gesetzt.

In ganz derselben Weise wurden vollkommen analoge Schmelzcurven auf der in entsprechender Weise aus reinem Wismut, den Legirungen von Wismut und Zinn mit steigendem Zinngehalt und reinem Zinn zusammengesetzten Platte erhalten, nur dass hier, wo die Unterschiede in den Wärmeleitungs-



Fig. 4a.

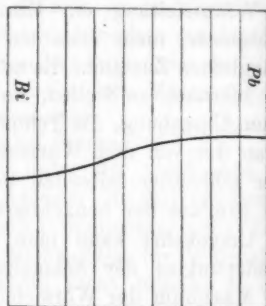


Fig. 4b.

fähigkeiten noch sehr viel erheblicher sind, der wesentliche Verlauf noch sehr viel charakteristischer und deutlicher ist. Kurz nach dem Anlegen der Platte an den warmen Kupferblock erfolgt Schmelzung der Elaidinsäure nur an den beiden



Fig. 5a.

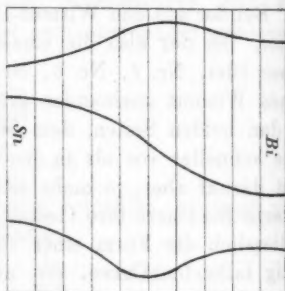


Fig. 5b.

Seiten nach dem reinen Zinn und reinen Wismut. Dann bildet sich eine Schmelzcurve mit tiefem Minimum aus, das etwa in der Mitte etwas nach dem Wismut hin liegt; schliesslich bildet sich eine Schmelzcurve aus, die stetig vom Zinnende zum Wismutende sinkt, aber einen sehr deutlich aus-

gebildeten Wendepunkt hat gerade an der Stelle, auf dem Streifen, auf dem sich im ersten Zustand das Minimum der Curve befindet. Beide Stadien sind auf der beigegeführten Photographie (Fig. 5) gut zu sehen (die obere Curve ist durch Erwärmen von b her entstanden).

Auf der aus reinem Zink, Zink mit steigendem Zusatz von Zinn, reinem Zinn zusammengesetzten Platte schliesslich ist kein Wendepunkt in der Schmelzcurve vorhanden; die Curve verläuft fast geradlinig mit schwacher Krümmung, die stets gleichsinnig bleibt. Auch im nichtstationären Zustand geht die Schmelzung ganz regelmässig voran, ohne Maximum oder Minimum (Fig. 6).



Fig. 6a.

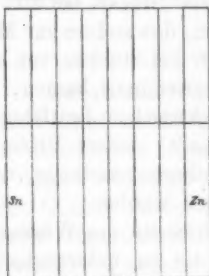


Fig. 6b.

Die drei Platten bestätigen also qualitativ die oben erhaltenen Resultate vollkommen.

Allerdings ist das Bestehen eines Wendepunktes unter der Bedingung abgeleitet, dass sich die Wärmeleitfähigkeit k stetig mit x ändert, dass also die einzelnen Streifen nicht, wie hier, endliche Breite haben; jedoch ist wohl nicht daran zu zweifeln, dass die angegebenen Formeln auch noch anwendbar bleiben, wenn die Breite der einzelnen Streifen, wie es hier der Fall ist, klein ist gegen die Gesamtbreite der Platte und die Länge der einzelnen Streifen.

Zu genauen Messungen ist diese Schmelzcurve wohl in der vorliegenden Gestalt noch nicht geeignet, da die einzelnen Streifen noch zu breit sind. Nimmt man jedoch die einzelnen Streifen noch schmäler und noch mehr Legirungen, so dürfte immerhin ganz gut daran gemessen werden können.

II.

Messung der elektrischen Leitfähigkeit.

Im Hinblick auf das Gesetz von Wiedemann und Franz war die elektrische Leitfähigkeit notwendigerweise an genau demselben Stück zu messen, an dem die Leitfähigkeit für Wärme gemessen war. Wie schon oben erwähnt, wurde nämlich jede Legirung nur in geringer Quantität hergestellt, um möglichste Homogenität zu erzielen; dieser Vorteil wäre wieder aufgehoben, wenn man nun zur Bestimmung der elektrischen Leitfähigkeit wieder besonders neue Legirungen gegossen hätte, oder selbst nur von demselben Guss zwei verschiedene Stücke benutzt hätte, eines zur Messung der thermischen, das andere zur Messung der elektrischen Leitfähigkeit. Da nun bei Stücken von so kleinen Dimensionen, wie sie hier zur Verwendung kamen, die üblichen Methoden zur Messung der elektrischen Leitfähigkeit versagen, wurde ein Verfahren angewandt, dessen Princip genau dasselbe ist, wie dasjenige der Isothermenmethode, nach welcher die Wärmeleitfähigkeiten gemessen wurden.

An Stelle des Wärmestromes wurde ein elektrischer Strom durch die zu untersuchende Platte geschickt, und der Knick der Isopotentiallinien gemessen, der sich an der Trennungslinie der beiden Substanzen genau so herstellt, wie der Knick der Isothermallinien beim Wärmestrom.

Es verhalten sich dann, wie G. Kirchhoff¹⁾ zuerst bewiesen hat, in vollständiger Analogie zu dem gleichen Fall bei der Wärmeleitung die Leitfähigkeiten für Elektrizität wie die Tangenten der Winkel, welche die Linien gleichen Potentials mit der Trennungslinie bilden. Es sei φ das elektrische Potential, κ_1 bez. κ_2 das elektrische Leitvermögen der Substanz (1) bez. (2). Im stationären Zustand entspricht dann der Gleichung für die Wärmeleitung

$$\kappa_1 \frac{\partial \tau}{\partial n_1} + \kappa_2 \frac{\partial \tau}{\partial n_2} = 0$$

hier die ganz analoge Gleichung

$$(1) \quad \kappa_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n_1} + \kappa_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n_2} = 0.$$

1) G. Kirchhoff, Pogg. Ann. 64. p. 497. 1845.

An der Trennungslinie selbst besteht bei der Wärmeleitung die Gleichung $\tau_1 = \tau_2$. Hier im Falle der elektrischen ist als Grenzbedingung nicht einzuführen $\varphi_1 = \varphi_2$, sondern $\varphi_1 - \varphi_2 = E$, wo E eine constante Grösse, die sogenannte Contactpotentialdifferenz der beiden sich berührenden Metalle bez. Legirungen ist. Da aber E constant ist längs der ganzen Berührungslinie, so gilt, wenn s die Richtung derselben bedeutet

$$(2) \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial s} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial s}.$$

w_1 und w_2 seien die Winkel, welche in einem Punkt der Trennungslinie die Isopotentiallinien auf den beiden Substanzen mit der Trennungslinie bilden. Division von (1) und (2) liefert dann

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{\operatorname{tg} w_1}{\operatorname{tg} w_2},$$

kann man also w_1 und w_2 messen, so liefert das Verhältnis ihrer Tangenten das Verhältnis der elektrischen Leitfähigkeiten.

Der erste, der die Brechung der elektrischen Strömungslinien, und damit auch der stets auf diesen senkrecht stehenden Linien gleichen Potentials an der Grenze zweier Medien verschiedener elektrischer Leitfähigkeit experimentell nachgewiesen hat, ist G. Quincke¹⁾ gewesen. Quincke untersuchte in derselben Weise, wie es Kirchhoff auf einer homogenen kreisförmigen Metallplatte gethan hatte, den Verlauf der Aequipotentiallinien auf einer aus zwei am Durchmesser zusammengelöteten Halbkreisen aus Blei und Kupfer bestehenden Platte. Die Zu- bez. Abführungselektrode befanden sich an zwei Punkten der Peripherie der Bleiplatte. Das Verhältnis der Leitfähigkeiten wurde nicht aus den Brechungswinkeln der Strom- bez. Aequipotentiallinien an der Trennungslinie, sondern aus dem Gesamtverlauf der Aequipotentiallinien berechnet.

Bei vorliegenden Versuchen wurden, wie schon gesagt, die Winkel w_1 und w_2 gemessen, die die Aequipotentiallinien mit der Trennungslinie bildeten, und aus dem Verhältnis ihrer Tangenten das Verhältnis der elektrischen Leitfähigkeiten berechnet.

1) G. Quincke, Pogg. Ann. 97. p. 382. 1856.

Zur genauen Ermittlung der Linien gleichen Potentials diente ein einfaches Verfahren, dessen sich bereits Kirchhoff und später Quincke bei den angeführten Messungen bedient haben. Man setzt, während die Platte von einem elektrischen Strom durchflossen wird, auf zwei Punkte der Platte je eine metallene Spitze, die mit den Endklemmen eines Galvanometers verbunden sind. Haben die beiden Punkte, in denen die Spitzen die Platte berühren, verschiedenes Potential, so wird durch das Galvanometer ein elektrischer Strom fließen; es fließt jedoch kein elektrischer Strom durch das Galvanometer, wenn sich die beiden Spitzen auf Punkten gleichen Potentials befinden. Lässt man *eine* Spitze fest auf einem Punkt liegen, so kann man auf diese Weise die Linie ermitteln, deren Punkte alle dasselbe Potential haben wie der erste Punkt, indem man mit der zweiten Spitze auf der Platte successive alle Punkte abtastet, bei deren Berührung das Galvanometer keinen Ausschlag zeigt.

Im einzelnen wurde folgendermaassen verfahren: An die beiden kurzen Seiten der schon für die Messung der Wärmeleitung benutzten rechteckigen Platten wurden etwas flach geschlagene ca. 1 mm breite Kupferdrähte angelötet und ver-

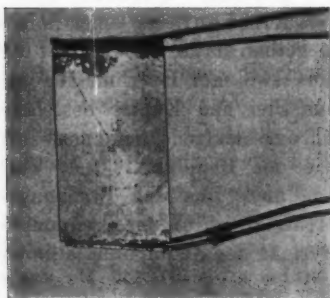


Fig. 7.

mittelst dieser ein starker von vier parallel geschalteten Accumulatoren gelieferter elektrischer Strom geschickt. An die Enden der Galvanometerdrähte waren Nähnadeln angelötet, und nun die eine von diesen auf irgend einen Punkt der Platte gestellt und mit der anderen Nähnadelspitze, wie schon geschildert, die Punkte auf der Platte abgetastet, bei deren Berührung das Galvanometer in Ruhe

blieb. An diesen Punkten wurde die Nähnadelspitze ein ganz wenig in die Platte eingedrückt, um eine Marke für die Messung zu haben. Fig. 7 zeigt eine derartig abgesuchte Platte. Zur Erhöhung der Genauigkeit wurden natürlich eine ganze Reihe derartiger

Punkte aufgesucht, bis die betreffende Linie gleichen Potentials vollkommen sicher abgesucht und festgestellt war. Die Stärke des durch die Platte hindurchgeschickten Stromes betrug 1—5 Amp. Als Galvanometer diente ein d'Arsonval'sches mit Gehänge von kleinerem Widerstand; es wurde objective Spiegelablesung an einer ca. 2 m vom Spiegel entfernten Scala angewandt, an der ein Teilstrich die Breite von ca. 10 mm hatte. Die Empfindlichkeit betrug etwa $4 \cdot 10^{-7}$ Amp. pro 1 Sct. Vermöge der vorzüglichen Ruhelage des Instrumentes konnte ein Ausschlag von $\frac{1}{10}$ Sct. noch mit Sicherheit constatirt werden. Die Stärke des durch die Platte zu schickenden Stromes hängt natürlich von dem elektrischen Widerstand und der Empfindlichkeit des Galvanometers ab. Verlangt man z. B., dass ein Abweichen der einen Spitze von dem Punkte gleichen Potentials der anderen Spitze um 0,1 mm einen Ausschlag von 1 Sct. hervorruft, was ungefähr den experimentellen Anforderungen entspricht, so ergibt eine leichte Rechnung, dass bei der hier gebrauchten Empfindlichkeit des Galvanometers von $4 \cdot 10^{-7}$ Amp. pro Sct. ein Strom von 1 Amp. (ungefähr) durch die Platte fließen muss, falls diese aus reinem Wismut besteht und von den hier bei diesen Versuchen vorliegenden Dimensionen ist (1 mm Dicke, 20 mm bez. 30 mm Kantenlänge). Der Widerstand im Galvanometer ist dabei zu 10 Ohm angenommen. Ist die Empfindlichkeit des Galvanometers grösser, so kann natürlich der Strom entsprechend kleiner sein.

Fehlerquellen.

Unter diesen sind besonders zwei zu nennen. Zunächst sind etwa vorhandene *Thermoströme* zu eliminiren, die das Resultat unter Umständen sehr fälschen können. Man muss also z. B. jede Berührung der Lötstellen der Nähnadeln vermeiden, oder noch besser, man benützt einfach die zugespitzten Enden der zum Galvanometer führenden Drähte selbst. Ob doch noch ein Rest von Thermoströmen vorhanden ist, lässt sich leicht dadurch ermitteln, dass man den Plattenstrom öffnet, nachdem man einen Punkt gleichen Potentials gefunden hat. Ist kein Thermoström mehr vorhanden, so bleibt das Galvanometer in Ruhe, andernfalls erhält man den vom Thermo-

strom herrührenden Ausschlag. Ist ein letzter Rest von Thermostrom nicht mehr zu entfernen, so kann man sich, ohne einen erheblichen Fehler zu begehen, damit begnügen, den allein vom Thermostrom herrührenden Stand des Galvanometers als Nullpunkt anzunehmen. Um auch Joule'sche Wärme zu vermeiden, die leicht zur Entstehung von Temperaturdifferenzen Anlass geben kann, verfährt man am besten so, dass man zunächst die Spitzen auf zwei beliebige Punkte der Platte stellt, während noch kein Strom durch sie hindurchgeht, und nun ganz kurz den Strom schliesst, nur um zu sehen, ob und nach welcher Richtung ein Strom durch das Galvanometer geht, dann den Plattenstrom wieder öffnet, die eine Spitze etwas weiter setzt, und wie eben verfährt und dies wiederholt, bis man den Punkt gleichen Potentials gefunden hat.

Eine zweite Fehlerquelle liegt in dem *Einfluss des Randes* auf die Gestalt der Aequipotentiallinien, der sich übrigens in gleicher Weise auch bei der Bestimmung der Wärmeleitung nach der Isothermenmethode geltend macht. Die allgemeine Gleichung, die für das elektrische Potential an Trennungslinien gilt.

$$\kappa_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n_1} + \kappa_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n_2} = 0$$

wird hier am Rande, wo κ_2 die elektrische Leitfähigkeit der Luft, gleich Null zu setzen ist:

$$\kappa \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0,$$

d. h. die Aequipotentiallinie steht am Rande senkrecht zu ihm. Die Aequipotentiallinien werden also von einem Punkt der Diagonale, wo sie unter irgend einem Winkel mit ihr ausgehen, allmählich umbiegen, bis sie senkrecht zum Rande endigen.

Dieses Umbiegen ist bei den Isothermen im Fall der Wärmeleitung direct an den Schmelzcurven zu sehen, aber abgeschwächt, da auch Wärmeabgabe nach aussen besteht. Bei den elektrischen Aequipotentiallinien ergibt es sich beim Abtasten derselben. Die stärksten Abweichungen der Aequipotentiallinien von geraden Linien werden sich offenbar ergeben, wenn der Unterschied in den elektrischen Leitfähigkeiten der beiden Substanzen sehr gross ist, sodass auf dem schlechter

leitenden Material die Linien gleichen Potentiales an der Diagonale nur einen kleinen Winkel mit ihr bilden.

Es ist also zur Winkelmessung genau festzustellen, bis wie weit von dem Diagonalepunkt ab die Aequipotentiallinien als geradlinig betrachtet werden können; nur bis dahin dürfen sie offenbar zur Winkelmessung benützt werden. Es ist noch ein Umstand zu erwähnen, den man auch beim analogen Fall der Wärmeleitung leicht bemerkt. Auf der schlechter leitenden Plattenhälfte ist der senkrechte Abstand zweier Aequipotentiallinien, die einer gewissen Potentialdifferenz entsprechen, kleiner als der entsprechende Abstand der analogen Linien auf der anderen Plattenhälfte (die Abstände verhalten sich wie die sinus der Neigungswinkel zur Diagonale). Infolge dessen ist, wie sofort ersichtlich, bei gleicher Empfindlichkeit des Galvanometers die Genauigkeit der Abtastung der Linien gleichen Potentiales entsprechend verschieden, was sich sehr bemerkbar macht, wenn der Unterschied der beiden Leitfähigkeiten sehr gross ist.

Die Messung der Winkel, die die Aequipotentiallinien mit der Trennungslinie machen, geschah in derselben Weise, wie bei der entsprechenden Messung bei der Wärmeleitung, mit den Teilkreisen des Kohlrausch'schen Sinuselektrometers und übergespanntem dünnen Faden. Die Platte wurde wieder auf die Mitte des drehbaren Kreises gelegt, der eine Punkt der Trennungsdigonale in den Mittelpunkt der Scheibe gebracht, erst die Diagonale unter den Faden gebracht, und dann der Kreis mit der Platte gedreht, bis nun der erste Punkt der Diagonale und der gefundene Punkt gleichen Potentiales gleichzeitig unter dem feststehenden Faden standen. Die Genauigkeit war nicht unbeträchtlich, da sich die Punkte gleichen Potentiales mit grosser Sicherheit feststellen liessen. Wie bei der Wärmeleitungsmessung hängt natürlich auch hier die Genauigkeit von der Grösse der zu messenden Winkel ab. Ist das Verhältnis der Leitfähigkeiten sehr gross, so wird der eine zu messende Winkel nahe an 90° kommen, sodass ein kleiner Beobachtungsfehler beim Ablesen des Winkels einen grossen Fehler im Resultat giebt. Bei mittleren Winkelgrössen, um 45° herum, konnte etwa auf $1/4^\circ$ abgelesen werden, was also eine Genauigkeit von etwa 2 Proc. giebt. Es wurden natürlich stets eine grössere Anzahl von Beobachtungen ge-

macht zur Erhöhung der Genauigkeit. Als Beispiel seien die Winkelmessungen an einer beliebig herausgegriffenen Platte mit den sich daraus ergebenden Werten des Verhältnisses der Leitfähigkeiten angeführt. Die einzelnen durch Striche getrennten Abteilungen entsprechen den Messungen an verschiedenen Stellen der Platte, α und β sind die gemessenen Winkel, κ_1/κ_2 das daraus berechnete Verhältniss der Leitfähigkeiten:

α	β	$\frac{\kappa_1}{\kappa_2}$
62° 30'	52° 30'	1,531
63 45	52 15	1,570
63 30	52 0	1,563
63 45	52 0	1,585
63 30	52 0	1,563
62° 15'	51° 0'	1,532
62 0	50 30	1,551
62 30	50 45	1,567
62 30	50 30	1,583
62 15	50 45	1,553
62° 0'	51° 0'	1,523
62 30	51 0	1,556
62 45	51 0	1,572
62 45	51 15	1,558
63 0	51 0	1,589

α	β	$\frac{\kappa_1}{\kappa_2}$
62° 0'	50° 30'	1,551
61 15	50 0	1,538
61 30	49 0	1,602
61 30	49 30	1,573
61 30	49 30	1,573
61° 30'	48° 30'	1,628
61 30	49 0	1,602
60 30	49 0	1,537
61 30	49 0	1,602
61 30	49 0	1,602

Mittel 1,568

Wie man sieht, ist die Genauigkeit recht gut, wenn man natürlich auch nicht entfernt die Genauigkeit erlangt, die man erhalten kann, wenn die Substanzen in Form dünner Drähte zur Verfügung stehen. Ein Vorteil der Methode besteht darin, dass man nur sehr wenig Substanz braucht. Um zu sehen, wie weit man darin wohl gehen kann, wurde eine Platte aus rechtwinklig dreieckigen Stücken von Kupfer und Zink hergestellt von der Dicke 1,5 mm und den Kathetenlängen 8 mm und 12 mm. Das Verhältniss der elektrischen Leitfähigkeiten konnte hier noch ganz bequem gemessen werden. Unzweifelhaft kann man in den Dimensionen noch weiter heruntergehen; auf jeden Fall kann man ja die Dicke noch geringer nehmen. Ein weiterer Vorteil liegt darin, dass man das Verhältniss der Leitfähigkeiten an einer ganz bestimmten Stelle der Platte erhält und dadurch etwaige Inhomogenitäten der Platte erkennen

kann. In der That zeigten sich bei einigen wenigen der untersuchten Platten Abweichungen der an verschiedenen Stellen der Platte gemessenen relativen Leitfähigkeiten untereinander, die wohl nur auf Ungleichmässigkeiten beim Guss zurückzuführen sind. Darin, dass man nur die relativen Leitfähigkeiten bei dieser Methode erhält, ist wohl kein Nachteil zu erblicken; muss man doch bei jeder Widerstandsbestimmung bereits bekannte Widerstände zur Verfügung haben.

Messungen.

Wie bei der Messung der Wärmeleitfähigkeiten wurden auch hier wieder nur die relativen elektrischen Leitvermögen der Legirungen gegen diejenigen der reinen Metalle bestimmt. Für die elektrischen specifischen Leitfähigkeiten wurden folgende Zahlen angenommen:

Metall	Spec. elektr. Leitf. (el.-magn. C.G.S.)
Wismut	0,830 $\cdot 10^{-5}$
Zinn	8,57 $\cdot 10^{-5}$
Zink	16,4 $\cdot 10^{-5}$
Blei	4,76 $\cdot 10^{-5}$

Auch hier wurden, wie bei der Wärmeleitung, um eine Bürgschaft für die Reinheit der Substanzen und die Zulässigkeit der Verwendung der eben genannten Zahlen zu haben, die relativen elektrischen Leitfähigkeiten nach der eben geschilderten Methode für einige der vier Metalle gemessen, wobei sich ergab:

	Gefunden	Berechnet
$k_{Pb} : k_{Bi}$	5,98	5,74
$k_{Zn} : k_{Sn}$	1,83	1,91

Es schien hierdurch die Anwendung obiger Zahlen für die elektrische Leitfähigkeit der reinen Metalle hinreichend gerechtfertigt. Die Abweichung hat namentlich bei $\kappa_{Pb} : \kappa_{Bi}$

nicht viel zu sagen, da hier der eine zu messende Winkel sehr gross war, also die Genauigkeit entsprechend nur gering.

Die Versuche bei den Legirungen hatten nun folgende Ergebnisse:

Erste Versuchsreihe.

Wismut mit Blei legirt, verglichen mit reinem Blei.

Nr.	Vol.-Proc.		$\frac{x}{x'}$	$x' \cdot 10^5_{\text{gef.}}$	$\bar{x} \cdot 10^5_{\text{ber.}}$
	Pb	Bi			
0	0	100	5,98	0,796	0,830
1	0,43	99,57	6,21	0,766	0,847
2	1,53	98,47	7,78	0,612	0,890
3	3,53	96,47	9,25	0,514	0,970
4	8,35	91,65	6,26	0,760	1,158
5	42,80	57,70	2,60	1,58	2,492
6	74,77	25,23	1,60	2,92	3,768
7	94,41	5,59	1,11	4,29	4,54
		[0			4,76]

x/x' ist in dieser Tabelle das gefundene Verhältniß der elektrischen Leitfähigkeiten von reinem Blei und der betreffenden Legirung, x' das aus diesem und der angenommenen Zahl für das elektrische Leitvermögen von reinem Blei berechnete Leitvermögen der Legirung, \bar{x} die aus der Mischungsregel berechnete Leitfähigkeit.

Die elektrische Leitfähigkeit der Wismut-Bleilegirungen bleibt also stets unterhalb der nach der Mischungsregel berechneten, für die Legirungen mit geringem Bleigehalt ist sie sogar geringer als diejenige des reinen Wismuts. Dies Ergebnis stimmt vollständig mit den von Matthiessen¹⁾ für die elektrische Leitfähigkeit von Wismut-Bleilegirungen erhaltenen Werten qualitativ überein.

Da bei diesen Versuchen, namentlich bei den besonders interessanten Legirungen 1—4, das Verhältniß der elektrischen Leitfähigkeiten sehr gross war, mithin die Genauigkeit der

1) A. Matthiessen, Pogg. Ann. 110. p. 190. 1860.

Messung gering, so wurden, wie schon bei den Wärmeleitungs-
messungen, die elektrischen Leitfähigkeiten einiger wenig Blei
enthaltenden Wismut-Bleilegirungen verglichen mit derjenigen
von reinem Wismut, sodass das gemessene Leitungsverhältnis
kleiner, und damit die Genauigkeit grösser wurde:

Zweite Versuchsreihe.

Wismut mit Blei legirt, verglichen mit reinem Wismut.

Nr.	Vol.-Proc.		$\frac{\kappa}{\kappa'}$	$\kappa' \cdot 10^5$ gef.	$\kappa' \cdot 10^5$ ber.
	Bi	Pb			
1	99,24	0,76	1,077	0,771	0,860
2	98,44	1,56	1,75	0,468	0,890
3	97,31	2,69	1,87	0,444	0,936
4	91,71	8,29	1,18	0,703	1,158

Die Resultate entsprechen denen der ersten Versuchsreihe.

In Fig. 8 sind neben den hier gefundenen Werten auch
die von Matthiessen erhaltenen Zahlen (durch Kreise be-
zeichnet) mit aufgenommen, unter der Annahme, dass die

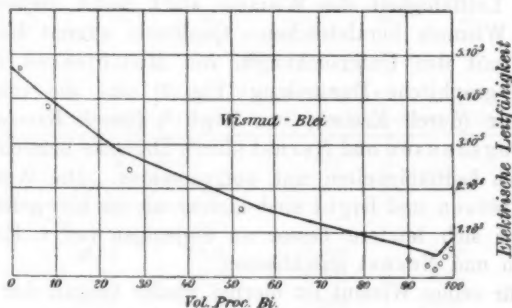


Fig. 8.

Leitfähigkeiten des reinen Wismuts beide Male dieselben sind.
Wie man sieht, sind die von Matthiessen gefundenen Leit-
fähigkeiten noch kleiner als die von mir gefundenen. Den
Grund der Abweichungen vermag ich nicht anzugeben.

Dritte Versuchsreihe.

Wismut mit Zinn legirt, verglichen zum Teil (Nr. 1—5) mit reinem Wismut, zum Teil mit reinem Blei (Nr. 6—8).

Nr.	Vol.-Proc.		$\frac{\kappa_{\text{Bi}}}{\kappa'}$	$\kappa' \cdot 10^5$ gef.	$\bar{\kappa} \cdot 10^5$ ber.
	Bi	Sn			
0	100	0			0,830
1	99,54	0,46	1,395	0,595	0,866
2	99,05	0,95	1,64	0,506	0,904
3	97,13	2,87	1,84	0,448	1,044
4	90,26	9,74	1,70	0,488	1,584
5	76,13	23,87	0,595	1,394	2,678
			$\frac{\kappa_{\text{Pb}}}{\kappa'}$		
6	49,90	50,10	1,78	2,675	4,708
7	24,98	75,07	0,909	5,381	6,640
8	4,27	95,73	0,699	7,58	8,239
	0	100			8,57

Es ergibt sich demnach (vgl. Fig. 9) bei den Wismut-Zinnlegierungen eine ganz ähnliche Abhängigkeit der elektrischen Leitfähigkeit vom Procentgehalt, wie bei den Wismut-Blei- legierungen, dass nämlich kleine Zusätze von Zinn die elektrische Leitfähigkeit des Wismuts stark unter diejenige des reinen Wismuts herabdrücken. Qualitativ stimmt dieses Ergebnis mit den Untersuchungen von Matthiessen überein. In die graphische Darstellung (Fig. 9) sind die von Matthiessen (durch Kreise), von Righi¹⁾ (durch Kreuze), von v. Ettingshausen und Nernst (durch Dreiecke bezeichnet) gefundenen Leitfähigkeiten mit aufgenommen. Die Werte von Matthiessen und Righi sind kleiner als die hier gefundenen, während sich letztere besser an diejenigen von v. Ettingshausen und Nernst anschliessen.

Für reines Wismut ist hierbei wieder überall der gleiche Wert angenommen, und auf die hierzu relativen sind die übrigen umgerechnet. Die Messungen von Wiedemann und Franz sind durch grosse Kreise gekennzeichnet; von den von Matthiessen erhaltenen Zahlen sind nur einige mitgeteilt.

1) A. Righi, Journ. de Phys. (2) 3. p. 355. 1884.

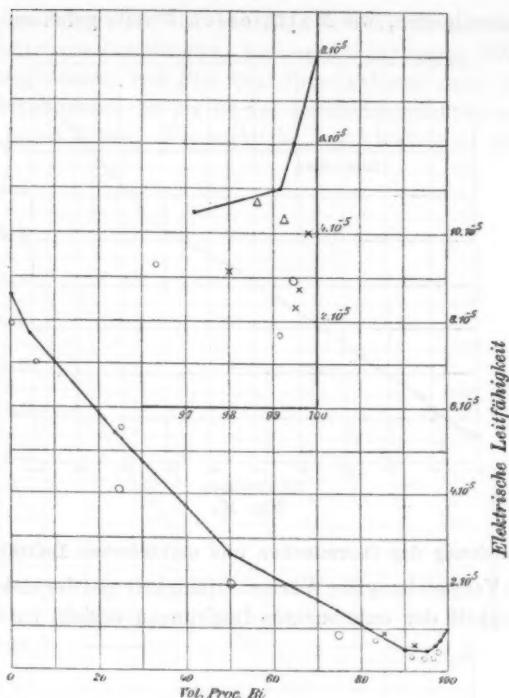


Fig. 9.

Vierte Versuchsreihe.

Zink mit Zinn legirt, verglichen mit reinem Zinn.

Nr.	Vol.-Proc.		$\frac{x_{\text{Sn}}}{x'}$	$x' \cdot 10^5 \text{ gef.}$	$\bar{x} \cdot 10^5 \text{ ber.}$
	Zn	Sn			
0	0	100			8,57
1	8,93	91,07	0,926	9,28	9,27
2	12,78	87,22	0,901	9,59	9,57
3	23,34	76,66	0,850	10,09	10,29
4	36,95	63,05	0,77	11,10	11,29
5	53,83	46,17	0,694	12,35	12,54
6	70,19	29,81	0,645	13,28	13,74
	100	0	0,547	15,2	16,4

Bei den Zink-Zinnlegierungen stimmt also die beobachtete Leitfähigkeit für Elektrizität überein mit der aus der Mischungs-

regel berechneten, wie Matthiessen bereits gefunden hat (vgl. Fig. 10).

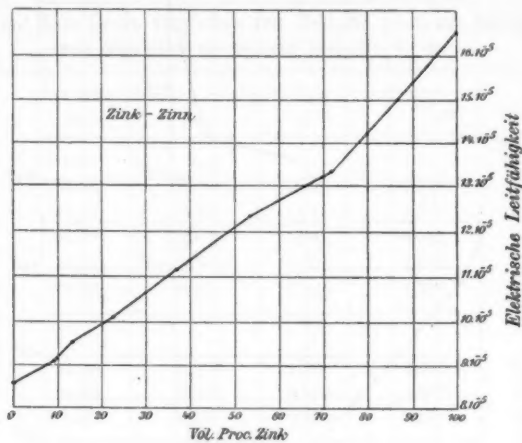


Fig. 10.

Vergleichung der thermischen und elektrischen Leitfähigkeit.

Die Vergleichung der Wärmeleitfähigkeit und der elektrischen Leitfähigkeit der untersuchten Legierungen ergibt sofort, dass

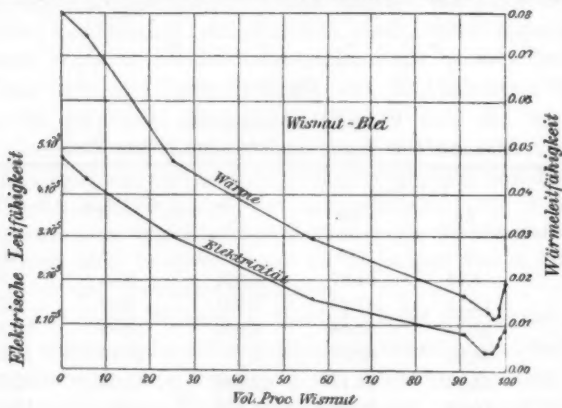


Fig. 11.

bei beiden die gleiche Abhängigkeit von der Zusammensetzung besteht. Bei den Wismut-Zinnlegierungen ist bei den Legierungen

mit geringem Gehalt an Blei bez. Zinn sowohl die thermische wie die elektrische Leitfähigkeit kleiner als für reines Wismut. Bei weiterem Zusatz von Blei bez. Zinn nehmen dann beide Leitfähigkeiten wieder zu bis zu den Leitfähigkeiten des reinen Bleis bez. reinen Zinns. Die wirkliche Leitfähigkeit ist sowohl

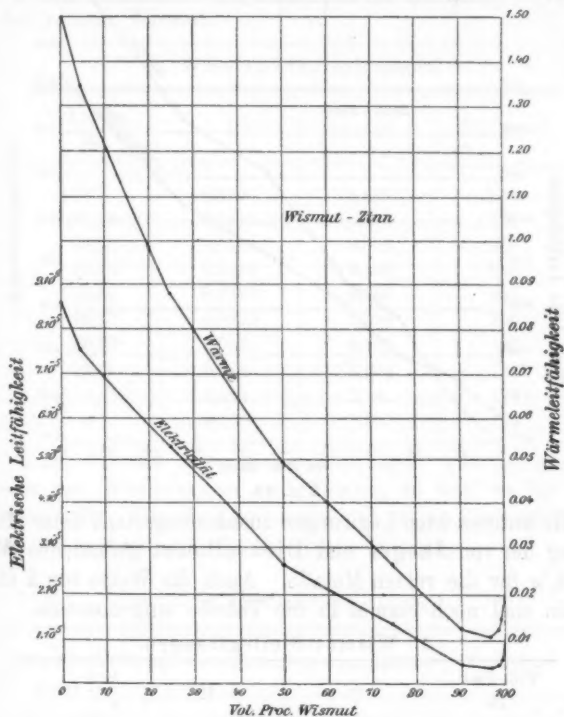


Fig. 12.

für Wärme als für Elektrizität stets kleiner als die nach der Mischungsregel berechnete.

Bei den Zink-Zinnlegierungen hingegen ist die Leitfähigkeit sowohl für Wärme als für Elektrizität annähernd gleich der aus der Mischungsregel berechneten.

In den graphischen Darstellungen (Fig. 11, 12, 13), welche beide Leitfähigkeiten gleichzeitig enthalten, ist der analoge Gang beider sofort zu übersehen.

Im Hinblick auf das Gesetz von Wiedemann und Franz ist der Quotient k/α der beiden Leitfähigkeiten von besonderem Interesse. Diese Quotienten sind in den drei folgenden Tabellen

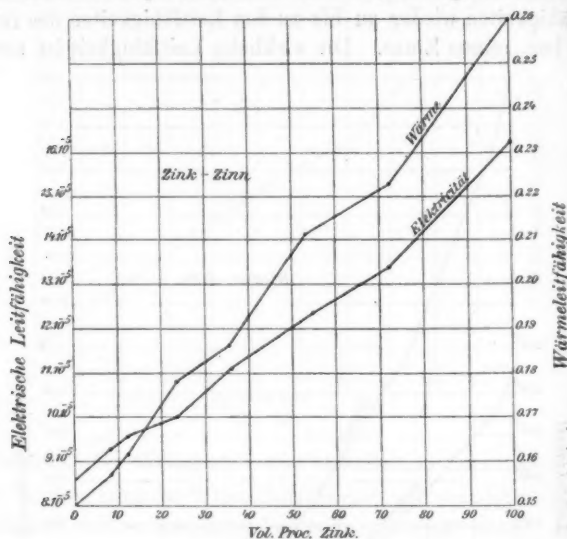


Fig. 13.

für alle untersuchten Legierungen zusammengestellt unter Hinzufügung der von Jaeger und Diesselhorst gefundenen Werte von k/α für die reinen Metalle. Auch die Werte von k und α einzeln sind noch einmal in die Tabelle aufgenommen.

1. Wismut-Bleilegirungen.

Vol.-Proc. Bi	k	$k \cdot 10^5$	$\frac{k}{\alpha} \cdot 10^{-1}$
100	0,019	0,830	230
99,57	0,0188	0,766	245
99,24	0,0173	0,771	224
98,47	0,0129	0,612	212
98,44	0,0119	0,468	256
97,31	0,0117	0,444	263
96,47	0,0129	0,514	251
91,71	0,0166	0,703	236
91,65	0,0183	0,760	240
57,70	0,0291	1,58	184
25,23	0,0468	2,92	160
5,59	0,0741	4,29	173
0	0,08	4,74	170

Im grossen und ganzen bleibt demnach bei den Wismut-Bleilegierungen das Gesetz von Wiedemann und Franz gültig, soweit dies bei der extremen Stellung möglich ist, die das reine Wismut zu dem Gesetz einnimmt. Bei den Legierungen mit geringem Bleigehalt scheint k/x etwas grösser zu sein als bei reinem Wismut.

2. Wismut-Zinnlegierungen.

Vol.-Proc. Bi	k	$x \cdot 10^5$	$\frac{k}{x} \cdot 10^{-1}$
100	0,0190	0,830	230
99,54	0,0140	0,595	235
99,05	0,0126	0,506	248
97,13	0,0110	0,448	245
90,26	0,0126	0,488	258
76,13	0,0279	1,394	200
49,90	0,050	2,675	187
24,90	0,088	5,331	165
4,27	0,184	7,58	177
0	0,150	8,57	175

Auch für die Wismut-Zinnlegierungen gilt demnach das Gesetz von Wiedemann und Franz, so weit es für reines Wismut gilt. Für die Legierungen mit wenig Zinn scheint k/x etwas grösser zu sein als für reines Wismut.

3. Zink-Zinnlegierungen.

Vol.-Proc. Zn	k	$x \cdot 10^5$	$\frac{k}{x} \cdot 10^{-1}$
100	0,25	16,2	160
70,19	0,224	13,28	168
53,83	0,213	12,35	172
36,95	0,186	11,10	168
23,34	0,178	10,09	176
12,78	0,162	9,59	169
8,93	0,157	9,28	169
0	0,150	8,57	175

Bei den Zink-Zinnlegierungen ist also das Gesetz von Wiedemann und Franz vollständig erfüllt.

Die Thatsache, dass bei den Legirungen von Wismut mit Blei und Wismut mit Zinn k/x bei den Legirungen mit verhältnismässig hohem, specifischem, elektrischem Widerstand grösser ist als bei den reinen Metallen, stimmt mit den sonstigen Erfahrungen an Legirungen überein. Nur bei Mischungen von Kupfer mit wenig Arsen und Kupfer mit wenig Phosphor ist nach Rietzsch (l. c.) k/x kleiner als für reines Kupfer.

Resultate.

Die Ergebnisse der vorliegenden Untersuchung lassen sich folgendermaassen zusammenfassen:

1. Die Legirungen von Wismut und Blei, sowie von Wismut und Zinn haben die gleiche Abhängigkeit von dem Mischungsverhältnis sowohl in Bezug auf die thermische als die elektrische Leitfähigkeit, indem beide Leitfähigkeiten bei kleinen Zusätzen von Blei bez. Zinn schnell unter diejenige des reinen Wismuts herabsinken, bei weiterem Zusatz von Blei bez. Zinn langsam zu derjenigen des reinen Bleis bez. Zinns ansteigen. Das thatsächliche Leitvermögen ist für die Wärme ebenso wie für Elektrizität stets kleiner als das nach der Mischungsregel berechnete.

Das Gesetz von Wiedemann und Franz gilt für diese Legirungen, soweit als es für reines Wismut gilt.

2. Bei den Legirungen von Zink und Zinn ist die Leitfähigkeit für Wärme ebenso wie für Elektrizität annähernd so, wie sie sich nach der Mischungsregel (auf das Volumen bezogen) berechnet.

3. Die Versuche machen es wahrscheinlich, dass sich, wie für die elektrische Leitfähigkeit, alle Metalle auch in Bezug auf die Wärmeleitfähigkeit in zwei Gruppen,

Gruppe I: Zink, Zinn, Blei, Cadmium,

„ II: alle übrigen Metalle

teilen, derart, dass die Legirungen von Metallen der Gruppe I untereinander die Wärme im Verhältnis ihrer Volumina leiten, dass aber Legirungen aus Metallen der Gruppe II untereinander oder aus Gruppe I und Gruppe II die Wärme nicht im Verhältnis ihrer Volumina leiten, sondern stets schlechter. Durch die schon erwähnten Versuche von Calvert und

Johnson gewinnt dieser Satz an Wahrscheinlichkeit. Es ist aber natürlich nicht mit Bestimmtheit auszusprechen, solange nicht *alle* denkbaren Legirungen aller Metalle auf ihre Wärmeleitfähigkeit hin untersucht sind.

Zum Schlusse sei mir gestattet, Hrn. Professor Richarz meinen herzlichen Dank auszusprechen für das freundliche Interesse, das er der vorliegenden Arbeit stets entgegengebracht hat.

Hrn. cand. Seddig bin ich für vielfache Hülfe bei Anfertigung der Photographien zu Dank verpflichtet.

Marburg, Juni 1902.

(Eingegangen 25. Juli 1902.)

4. Zur Construction von Teslitransformatoren. Schwingungsdauer und Selbstinduction von Draht- spulen; von P. Drude.

(Fortsetzung von p. 293.)

II. Selbstinduction von Drahtspulen.

Für constante Ströme haben Maxwell, Lord Rayleigh, H. Weber und J. Stefan Formeln für die Selbstinduction von Spulen berechnet. Für schnelle Stromoscillationen muss die Selbstinduction kleiner werden. Anstatt dies zu berechnen, bin ich experimentell verfahren.

16. *Die Messmethode* bestand darin, dass die Drahtspulen mit ihren Enden angelegt wurden an die Platten eines Condensators K von unveränderlicher Capacität und nun dies System von dem oben p. 294 beschriebenen Erreger inductiv erregt wurde. Die Distanz d der Platten des Erregercondensators wurde mikrometrisch so lange verstellt, bis dass eine an eine Platte des Condensators K angelegte Vacuumröhre maximal leuchtete. Diese Stellung d entspricht der Resonanz zwischen Erreger und Empfänger. Da wiederum (wie früher) die magnetische Koppelung zwischen Erreger und Empfänger sehr klein gewählt wurde, so war die Resonanz ausserordentlich scharf (d konnte auf $\frac{1}{50}$ mm abgelesen werden, die Messgenauigkeit war $\frac{1}{3}$ Proc.) und nur wenn d sehr nahe an der Resonanzlage lag, leuchtete die Röhre überhaupt auf. — Aus d ergab sich dann nach der früher beschriebenen Eichmethode die Wellenlänge λ der Schwingung.

Da nun ist:

$$(24) \quad \lambda = 2\pi\sqrt{LC},$$

falls L Selbstinduction, C Capacität (nach elektrostatischem Maass) des Empfängers bedeutet, so ergibt sich aus λ und C

die Selbstinduction L . Die Capacität C kann nach der oben p. 299 Anm. 2 citirten Formel berechnet werden.¹⁾

Der Condensator K bestand aus zwei Messingkreisplatten²⁾ von 99,2 mm Durchmesser, zwischen die drei kleine Ebonitplättchen (Quadrate von 3 mm Seitenlänge) gelegt wurden, deren Dicken betrugen:

1,013 1,020 1,023 Mittel 1,019 mm.

In einem zweiten Falle betrugen die Dicken

0,520 0,532 0,538 Mittel 0,538 mm.

Die Capacität berechnet sich³⁾ (die Dicke der Condensatorplatten war 1,5 mm) nach der citirten Formel im ersten Falle zu:

$$C = 63,4,$$

im zweiten Falle zu

$$C = 119,5.$$

Zur Berechnung von C kann man auch experimentell vorgehen, indem C mit einem einfachen Drahtkreise bez. Drahtrechteck geschlossen und λ bestimmt wird. Da man die Selbstinduction L von Kreis und Rechteck sicher berechnen kann, so ergibt sich dann⁴⁾ aus λ die Capacität C .

1) Bei schnellen Schwingungen ist die Capacität eines Plattencondensators wegen des Zusammendrängens der elektrischen Kraftlinien nach dem Rande zu etwas kleiner, als bei statischen Ladungen. Indess ist diese Correction hier zu vernachlässigen; vgl. E. Cohn u. F. Heerwagen, Wied. Ann. 43. p. 362. 1891.

2) In der Mitte waren zwei Löcher von 5 mm Durchmesser ausgestochen. Die dadurch bewirkte Capacitätsverminderung ist in der Rechnung berücksichtigt. Eine der Condensatorplatten war durch eine durch ihr Centralloch gehende Schraube an einem Ebonitcylinder von 2 cm Durchmesser festgeschraubt, sodass der Condensator sowohl in horizontaler, als in verticaler Lage benutzt werden konnte. In letzterem Falle wurde die zweite Condensatorplatte durch drei kleine Ebonitklammern gehalten.

3) Die Vergrößerung der Capacität durch die Dielektricitätsconstante (2,79) der Ebonitplättchen ist dabei mit berücksichtigt.

4) Die Formel (24) ist nicht direct benutzt, sondern unter Rücksicht auf die weiter unten genannte Correction.

Dieser so gefundene Wert von C war (vgl. weiter unten in § 10) im ersten Falle

$$C = 63,1,$$

im zweiten Falle¹⁾

$$C = 119,1,$$

d. h. im ersten Falle um $\frac{2}{3}$ Proc., im zweiten Falle um $\frac{1}{3}$ Proc. kleiner, als der berechnete Wert C . Nun musste C deshalb etwas kleiner, als nach der Rechnung, ausfallen, weil die Platten nicht polirt waren, sondern kleine Kratzen enthielten, die schon 1 Proc. Einfluss haben können, wenn sie nur 0,01 mm tief sind.

In der That ergab sich nach dieser Methode nach Politur der Messingplatten $C = 63,5$ bei 1,019 mm Plattenabstand, d. h. ein bis auf $\frac{1}{6}$ Proc. übereinstimmender Wert mit dem theoretischen.

Bei Benutzung der Formel (24) ist zu berücksichtigen, dass sie streng nur gilt, wenn die Stromstärke im ganzen Schliessungskreise constant ist, was nur anzunehmen statthaft ist, wenn die Wellenlänge λ sehr gross gegen die Drahtlänge l des Schliessungskreises ist. Streng ist²⁾ λ zu berechnen aus der Formel:

$$(25) \quad \pi \frac{l}{\lambda} \operatorname{tg} \frac{\pi l}{\lambda} = \frac{l^2}{4 L C}.$$

Wenn der Wert der rechten Seite dieser Gleichung klein ist (gleich α^2), so wird $\pi l/\lambda$ näherungsweise gleich α sein. Wir können also setzen

$$\pi \frac{l}{\lambda} = \alpha (1 - \delta).$$

Da

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \varepsilon + \frac{1}{3} \varepsilon^3,$$

falls ε klein gegen 1 ist, so ergibt sich aus (25):

1) Der Condensator war durch eine 2 mm dicke Kreisleitung der Länge $l = 54,7$ cm geschlossen. Es ergab sich $\frac{1}{2} \lambda = 766$ cm. Der Condensator ist zu anderen Versuchen mit dieser geringeren Plattendistanz nicht benutzt worden.

2) Vergl. G. Kirchhoff, Ges. Abhandl. p. 181, 154, 182; P. Drude, Phys. d. Aethers p. 383, Formel (63).

$$\alpha^2 (1 - \delta)^2 (1 + \frac{1}{3} \alpha^2) = \alpha^2 = \frac{l^2}{4 L C},$$

d. h.

$$\delta = \frac{1}{6} \alpha^2,$$

$$\pi \frac{l}{\lambda} = \frac{l}{2 \sqrt{L C}} (1 - \frac{1}{6} \alpha^2).$$

Es wird also schliesslich

$$(26) \quad \frac{\lambda}{2} = \pi \sqrt{L C} \left(1 + \frac{l^2}{24 L C} \right),$$

oder

$$(26') \quad \frac{\lambda}{2} = \pi \sqrt{L C} + \frac{\pi l^2}{24 \sqrt{L C}}$$

Diese Gleichung dient zur Berechnung von λ aus L und C .Will man umgekehrt LC aus λ berechnen, so folgt

$$(27) \quad \sqrt{L C} = \frac{\lambda}{2 \pi} \left(1 - \frac{\pi^2 l^2}{6 \lambda^2} \right),$$

oder

$$(27') \quad L = \frac{\lambda^2}{4 \pi^2 C} - \frac{l^2}{12 C}.$$

17. *Einfache Kreise* wurden hergestellt aus Kupferdraht der Dicke $2\varrho = 1, 2, 3$ mm und der Länge $l = 80,8; 54,7$. Der Condensator K wurde mit der Plattendistanz $d = 1,019$ mm benutzt. Die Drahtkreise wurden federnd gegen die Condensatorplatten gelegt und an einer Stelle isolirend gestützt. Es ergab sich, dass die Anlegestelle der Kreise an den Condensator K (ob am Rand oder dicht an der Mitte) auf λ gar keinen Einfluss hatte. Folgende Tabelle enthält die Resultate. r ist der Radius der Kreise; aus λ und der nach der Formel

$$(28) \quad L = 2l(\log \text{nat } 8r/\varrho - 2)$$

berechneten Selbstinduction ist die Capacität C gemäss (27) berechnet worden:

Condensatorplatten nicht polirt.

l cm	$2r$ cm	2ϱ mm	L cm	$\frac{1}{2}\lambda$ cm	C cm
80,8	25,9	1	908	755	62,9
80,8	25,9	3	731	677	62,7
54,7	17,5	1	572	599	63,2
54,7	17,5	2	498	559	63,1
54,7	17,5	3	454	536	63,5

Als Mittel folgt daher

$$C = 63,1.$$

Die Drähte waren ziemlich genau kreisförmig gebogen. Es kommt darauf übrigens gar nicht genau an, denn wenn ein Kreisdraht der Länge $l = 54,7$ cm zu einer Ellipse mit dem Axenverhältnis 3:4 gebogen wurde, so verkleinerte sich dadurch $\frac{1}{2}\lambda$ erst um $\frac{1}{10}$ Proc. Dagegen kommt es sehr genau (auf 1 mm) auf die Drahtlänge l an.

Der Condensator wurde auch durch zwei kürzere Kreisdrähte der $l = 25$ cm Länge geschlossen. Benutzt man den Capacitätswert $C = 63,1$, so ergibt sich aus (27) die Selbstinduction L in folgender Weise ($L_{\text{beob.}}$):

l cm	$2r$ cm	2ϱ mm	$\frac{1}{2}\lambda$ cm	L beob.	L ber.
25,0	8,1	1	374	224	223
25,0	8,1	2	342	187,5	188

Der beobachtete und der berechnete Wert von L sind also innerhalb $\frac{1}{2}$ Proc. identisch, d. h. die Drähte waren noch nicht so dick im Vergleich zu $2r$, dass auf die ungleichmässige Verteilung des Stromes auf der Oberfläche des Drahtes Rücksicht zu nehmen ist. Die Formel (28) setzt voraus, dass der Strom gleichmässig dicht rings um die Drahtaxe herum allein auf der Oberfläche des Drahtes fliesst.¹⁾

Wenn der Schliessungsdraht nicht allseitig von Luft umgeben ist, sondern auf einen isolirenden Kern von grösserer Dielektricitätsconstante gewickelt ist, so ändert sich dadurch die Selbstinduction L nicht. Trotzdem kann die Periode des

1) Ein schnell wechselnder Strom verteilt sich stets so, dass seine Selbstinduction ein Minimum ist; vgl. J. Stefan, Wied. Ann. 41. p. 400. 1890. Die Selbstinduction für dickere Kreisdrähte, bei denen ϱ/r gegen 1 nicht zu vernachlässigen ist, ist von Minchin, Electrician 32. p. 168. 1893 (vgl. auch G. Wiedemann, Lehre von der Elektrizität, 2. Aufl., 4. p. 85. 1898) berechnet worden. Sie muss etwas kleiner sein, als nach Formel (28). — Die Krümmung des Drahtes bewirkt noch keine merkliche Abweichung von der Formel, vgl. M. Wien, Wied. Ann. 53. p. 935. 1894.

mit dem Condensator verbundenen Schliessungsdrahtes etwas grösser werden, wenn die Dielektricitätsconstante des Kernes sehr gross ist. So ergab ein 1 mm dicker Kupferdraht, der auf einem 15,4 cm weiten Becherglas mit Siegelack an zwei Stellen angekittet war, $\frac{1}{2}\lambda = 575$ cm. Wurde destillirtes Wasser in das Becherglas gegossen, so vergrösserte sich $\frac{1}{2}\lambda$ auf 585 cm, dagegen ergab eine Alkoholfüllung keine merkliche Vergrösserung von $\frac{1}{2}\lambda$, und auch keine Schwächung der Schwingungen. Die Vergrösserung von $\frac{1}{2}\lambda$ durch die grössere Dielektricitätsconstante des Kernes ist also nur sehr gering und das ist auch aus folgendem Grunde verständlich: Wenn die Länge l des Schliessungsdrahtes klein ist gegen die Wellenlänge λ , so ist die Stromstärke im Schliessungsdrahte annähernd constant, sie nimmt nur ganz wenig ab nach den Enden des Schliessungsdrahtes zu. Diese Abnahme der Stromstärke ist begleitet von einer elektrischen Ladung der Drahtoberfläche, d. h. einer Entsendung elektrischer Kraftlinien. Dadurch wächst die Capacität des ganzen Systems, und daher muss λ etwas grösser als $2\pi\sqrt{LC}$ sein, wie auch Formel (26) lehrt. Wenn diese elektrischen Kraftlinien des Schliessungskreises anstatt in Luft in einem Medium grösserer Dielektricitätsconstante verlaufen, so muss dadurch die Capacität des ganzen Systems noch etwas mehr zunehmen, d. h. die Periode sich weiter vergrössern. Aber diese Vergrösserung muss nur gering sein, da sie offenbar proportional mit $l^2:\lambda^2$ ist, wie Formel (27) lehrt.

Daher ist es unbedenklich, bei der Untersuchung von Spulen einen Holzkern zu verwenden. Die Dielektricitätsconstante und elektrische Absorption des Holzes hat gar keinen Einfluss, so lange $l:\lambda$ nicht wesentlich grösser ist, als bei den hier angestellten Versuchen ($l/\lambda \leq 0,05$), da nicht einmal Alkoholfüllung Einfluss auf λ und Intensität der Schwingungen äusserte, wobei doch Alkohol eine viel grössere Dielektricitätsconstante und grössere elektrische Absorption, als Holz, besitzt.

Dagegen muss man auf eine andere Correction achten, wenn der Schliessungsdraht auf einen Kern gewickelt wird. Die Enden des Drahtes müssen zum Anschluss an die Condensatorplatten in zwei parallele Enden auslaufen, welche senk-

recht zur Oberfläche des Spulenkernes stehen. Die Selbstinduction L' dieser Drahtenden ist (vgl. oben p. 300 Anm. 2)

$$(29) \quad L' = 4 l' \lognat d' / \varrho',$$

wenn l' die Länge jedes dieser beiden Drahtenden bedeutet, d' ihren Axenabstand, $2 \varrho'$ die Drahtdicke. Man wird natürlich l' und d' möglichst klein wählen, immerhin ist L' durchaus nicht ganz zu vernachlässigen gegen die Selbstinduction des übrigen Schliessungskreises.

So war z. B. bei dem auf dem Becherglas befestigten Schliessungskreise, der auf eine Länge $l = 48$ cm am Glase anlag, während zwei 4 cm lange Drahtenden in 4 mm Distanz zum Condensator führten (d. h. bei $l' = 4$ cm, $d' = 0,4$ cm, $\varrho' = 0,05$ cm) $\frac{1}{2} \lambda = 579$ cm. Wurden die Drahtenden um $2\frac{1}{2}$ cm verkürzt (d. h. bei $l' = 1,5$ cm), ergab sich $\frac{1}{2} \lambda = 565$ cm.

Nennt man ζ die procentische Zunahme von λ , falls sich die Selbstinduction um L' vergrößert, d. h. setzt man

$$(L + L') C = \left(\frac{\lambda'}{2\pi} \right)^2 \left(1 - \frac{\pi^2 l'^2}{3 \lambda^2} \right),$$

$$L C = \left(\frac{\lambda}{2\pi} \right)^2 \left(1 - \frac{\pi^2 l'^2}{3 \lambda^2} \right),$$

$$\lambda' = \lambda(1 + \zeta),$$

so wird

$$(30) \quad L' C = 2 \zeta \left(\frac{\lambda}{2\pi} \right)^2 \left(1 - \frac{\pi^2 l'^2}{3 \lambda^2} \right).$$

In unserem Falle ist $\frac{1}{2} \lambda' = 579$, $\frac{1}{2} \lambda = 565$, d. h. $\zeta = 0,025$. Daher ergibt sich die Selbstinduction L' für zwei $2\frac{1}{2}$ cm lange Drähte ($d' = 4$ mm, $\varrho' = \frac{1}{2}$ mm) mit Benutzung des Wertes $C = 63,1$:

$$L' = 25,5 \text{ cm},$$

während sich nach Formel (29) ergibt $L' = 21$ cm.

Die Selbstinduction L des Schliessungskreises inclusive der zwei $1\frac{1}{2}$ cm langen Enden l' ergibt sich aus $\frac{1}{2} \lambda = 565$ cm zu $L = 510$ cm, während nach Formel (28) und (29) ($l = 48$ cm,

$2r=15,4$ cm, $2\rho=0,1$ cm, $l'=1,5$ cm, $d'=0,4$ cm, $2\rho'=0,1$ cm)
sich L berechnet zu $491+13=504$ cm.

Ein Kreis auf Holzkern ergab: Bei $l=43,8$, $2r=14$,
 $2\rho=0,1$, $l'=1$, $d'=0,7$, $2\rho'=0,1:1/3$, $\lambda=535$ cm. Daher folgt
aus (27) mit $C=63,1$: $L=456$, während sich aus (28) und (29)
berechnet $L=451$ cm. Wurde ein 0,4 mm dicker Draht ver-
wendet, so ergab sich $L=529$ cm nach der Beobachtung,
 $L=532$ cm nach der Berechnung. Hiernach und aus der
Tabelle p. 593, welche die Werte von C angiebt, ist zu schliessen,
dass die Beobachtungsfehler für L nicht mehr als 1 Proc. nach
dieser Methode betragen.

18. Rechtecke. Auch bei rechteckigem Schliessungskreise
ist die Selbstinduction zu berechnen und daher aus der λ -Be-
stimmung die Capacität des Condensators zu entnehmen. Hat
das Rechteck die Seiten a und b , so ist (vgl. M. Wien, l. c.
p. 930) die Selbstinduction

$$(31) \quad \left\{ L = 4 \left\{ a \log \frac{2ab}{\varrho(a + \sqrt{a^2 + b^2})} + b \log \frac{2ab}{\varrho(b + \sqrt{a^2 + b^2})} \right. \right. \\ \left. \left. + 2(\sqrt{a^2 + b^2} - a - b) \right\} \right\}.$$

Ist die eine Seite a viel länger als die andere Seite b ,
und entwickelt man bis zu zweiten Potenzen von b/a , so ent-
steht:

$$(32) \quad L = 4a \left\{ \log \frac{b}{\varrho} \left(1 + \frac{b}{a} \right) - \frac{b}{a} (2 - \log 2) - \frac{b^2}{4a^2} \right\},$$

oder, wenn man die Länge

$$l = 2(a + b)$$

der Leitung einführt:

$$L = 2l \left\{ \log \frac{b}{\varrho} - \frac{b}{a} (2 - \log 2) + \frac{b^2}{a^2} \left(\frac{1}{2} - \log 2 \right) \right\},$$

d. h.

$$(33) \quad L = 2l \left(\log \frac{b}{\varrho} - 1,31 \frac{b}{a} + 1,06 \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right).$$

2 cm über einen in Millimeter eingetheilten Holzmaass-
stab waren zwei je 1 mm dicke Kupferdrähte straff, einander
parallel gespannt im Abstand $b=2,65$ cm. Das eine Ende
der Drähte wurde auf je einen an den Platten des Conden-

sators K angeschraubten, 2 cm langen Messingstutzen¹⁾ gelegt, über das andere Ende der Drähte konnte ein Drahtbügel B verschoben werden. Je nach dessen Stellung wurden daher verschiedene Seitenlängen a der rechteckigen Leitung abgegrenzt. Die Leitung wurde 10–20 cm über der Erregerebene ausgespannt, sodass sie inductiv erregt wurde, und λ wieder aus der Resonanz ermittelt. Es ergab sich:

a cm	$\frac{1}{2} \lambda$ cm	L	C
21,7	474	362	62,6
27,2	530	451	62,9
35,7	609	587	63,5

Mittel $C = 63,0$

Dieser Wert von C stimmt also bis auf $\frac{1}{6}$ Proc. überein mit dem oben p. 593 aus den Kreisleitungen gewonnenen. — Der Condensator mit polirten Platten ergab bei $a = 34,0$, d. h. $L = 565 \text{ cm}^2$), die halbe Wellenlänge $\frac{1}{2} \lambda = 598 \text{ cm}$, daher $C = 63,5$. Dieser Wert stimmt also auf $\frac{1}{6}$ Proc. mit dem oben p. 591 berechneten Wert von C .

Diese Leitung mit den Paralleldrähten konnte nun auch sehr gut dazu benutzt werden, um den Erreger für grössere Wellenlängen zu aichen, bei denen eine directe Messung nach der oben p. 298 angegebenen Methode zu unbequem ist. Man kann entweder so verfahren, dass die Platten des Condensators C im Erregerkreis auf bestimmte Distanzen d eingestellt werden, und die Resonanzlagen des Bügels B auf der Parallelleitung, d. h. die Rechteckslängen a ermittelt werden, oder dass B auf bestimmtes a gelegt wird, und die Resonanzwerte von d ermittelt werden. Beide Verfahren führen zu

1) Diese Messingstutzen waren 4 mm dick. Da sie nicht die gleiche Dicke, wie die Drähte hatten, ist bei der Berechnung von L eine kleine Correction gemäss Formel (31) angebracht worden.

2) Bei diesem Versuch waren die Messingstutzen am Condensator abgeschraubt, sodass die Leitung überall nur aus 1 mm dickem Kupferdraht bestand. Formel (33) ist daher ohne Correction anzuwenden.

derselben Genauigkeit. Es wurde letzteres Verfahren gewählt, weil es etwas bequemer war. Die Resultate der Aichung¹⁾ sind in folgender Tabelle enthalten. Als Capacität C des Condensators K ist der Wert $C = 63,1$ benutzt.

a cm	d mm	$\frac{1}{2}\lambda$ cm	$\frac{1}{2}\lambda\sqrt{d}$	$\frac{1}{2}\lambda\sqrt{d}$ ausgeglichen
21,7	5,18	473	1076	1076
27,2	4,02	529	1060	1057
35,7	2,97	605	1042	1042
42,7	2,45	662	1037	1037
53,2	1,91	738	1021	1031
70,7	1,44 ₅	851	1023	1023
110,7	0,93	1066	1027	2019

Aus dem schon oben p. 300 Anm. 2 erwähnten Grunde muss $\frac{1}{2}\lambda\sqrt{d}$ mit abnehmendem d etwas abnehmen, wie auch die Tabelle zeigt. Die bequemste und genaueste Methode, um aus beobachtetem d die halbe Wellenlänge $\frac{1}{2}\lambda$ abzuleiten, ist nun die, dass man zunächst die beobachteten Werte $\frac{1}{2}\lambda\sqrt{d}$ (Columnne 4 der Tabelle) graphisch (durch eine Curve) ausgleicht (Columnne 5 der Tabelle), sodann bei einem beliebigen d den entsprechenden Wert $\frac{1}{2}\lambda\sqrt{d}$ aus der fünften Columnne der Tabelle oder aus einer graphischen Darstellung entnimmt, und diesen Wert $\frac{1}{2}\lambda\sqrt{d}$ durch die Quadratwurzel aus dem beobachteten d dividirt. In dieser Weise ist im Folgenden verfahren.

19. *Spulen.* Die Drähte wurden auf Holzkernen befestigt (vgl. oben p. 595); entweder wurden die Drähte in der Nähe ihrer Enden durch Siegellack oder Wachs gehalten, oder durch zwei 5 mm lange, 0,7 mm dicke umgeschlagene Eisendraht-

1) Der Condensator C war jetzt an Metallstützen ee montirt (vgl. oben p. 301), um möglichst unveränderliches d zu erhalten, und der eine Arm h war beständig zur Erde abgeleitet. Daher ist die Capacität des Condensators etwas grösser, als früher bei Benutzung der Ebonitstützen ee und die in der Tabelle für bestimmtes d gegebenen Werte von $\frac{1}{2}\lambda$ schliessen sich nicht stetig an die oben p. 299 mitgetheilten Werte an, sondern sind hier um etwa 15 cm grösser.

stiftchen. Diese äusserten keinen messbaren Einfluss auf die Selbstinduction, wie directe Controlversuche lehrten.

Im Folgenden bezeichnet n die Windungszahl, $2r$ den Durchmesser der Spule, h die Höhe der Spule ($h = (n-1)g$), g die Ganghöhe der Spule, δ die Dicke des Spulendrahtes, l die Länge des Spulendrahtes, soweit er an dem Spulenkern anliegt, l' die Länge der vom Spulenkern abstehenden Drahtenden, die zum Condensator K führten (vgl. oben p. 596), d' ihren mittleren Axenabstand, L_1 die aus λ mit Benutzung des beobachteten Wertes $C = 63,1$ bez. $C = 63,5$ (vgl. oben p. 598) nach Formel (27) berechnete Gesamtselbstinduction des Schliessungskreises, $L = L_1 - L'$ die Selbstinduction der eigentlichen Spule L , wobei L' nach (29) berechnet ist.

Die beobachteten Werte von $L/2l$ sind verglichen mit den nach Stefan¹⁾ für langsam wechselnde Ströme berechneten Werten:

$$(34) \quad \left\{ \frac{L}{2l} = n \left\{ \left(1 + \frac{h^2 + \frac{1}{2}\delta^2}{32r^2} \right) \operatorname{lognat} \frac{8r}{\sqrt{h^2 + \delta^2}} - y_1 + \frac{h^2}{16r^2} y_2 \right\} + \operatorname{lognat} g/\delta. \right.$$

Dabei sind y_1 und y_2 von δ/h abhängig und ihre Werte aus einer von J. Stefan berechneten Tabelle zu entnehmen, welche ich weiter unten reproducirt habe. Das letzte Glied in (34), nämlich der Term $\operatorname{lognat} g/\delta$ findet sich bei Stefan nicht, da seine Formel für Spulen von dünn isolirtem Draht mit möglichst genäherten Windungen gilt, sodass $g/\delta = 1$ ist. Bei den Primärspulen der Teslatransformatoren muss g/δ merklich grösser als 1 sein (z. B. bei dick isolirtem Draht, bei dem g mindestens gleich $\delta +$ doppelte Isolationsdicke ist), weil sonst Funken zwischen den Windungen überspringen. Daher ist der letzte Term nach Maxwell²⁾ hinzuzufügen.

1) J. Stefan, Wied. Ann. 22. p. 107. 1884. Es ist dabei vorausgesetzt, dass die Drahtdicke δ klein gegen den Spulendurchmesser $2r$ ist, was bei den hier untersuchten Spulen der Fall war und ebenso in praxi meist der Fall sein wird.

2) Cl. Maxwell, Elektrizität und Magnetismus, deutsch von Weinstein, 2. Aufl. 2. p. 407. 1883. Vgl. auch G. Wiedemann, Lehre von der Elektrizität, 2. Aufl. 4. p. 86. § 119.

$$2r = 2,92 \text{ cm}, \quad \delta = 0,4 \text{ mm}, \quad g = 2 \text{ mm}, \quad g/\delta = 5, \quad 2r/\delta = 73, \\ C = 63,5 \text{ cm}.$$

n	l	l'	d'	$\frac{1}{2}\lambda$	L_t	L'	L	$L:2l$		
	cm	cm	mm	cm	cm	cm	cm	beob.	ber.	ber.—beob.
2	18,8	1	4	397	250	12	238	6,50	8,38	1,88
3	27,5	1	5	539	464	13	451	8,20	9,96	1,76
4	36,7	1	6	668	712	14	698	9,51	11,29	1,78
5	45,8	1	7	794	1006	14	992	10,80	12,42	1,62
6	55,1	1,5	8	901	1295	22	1278	11,55	13,36	1,81
7	64,6	1,5	9	1020	1659	23	1636	12,65	14,18	1,53
8	73,9	1,5	10	1119	1997	24	1973	13,86	14,88	1,52
9	83,1	1,5	11	1211	2337	24	2313	13,92	15,55	1,63

Die Differenz

$$\Delta = L/2l(\text{ber.}) - L/2l(\text{beob.})$$

nimmt also mit wachsender Windungszahl n etwas ab. Dies ist in jedem Falle (d. h. auch bei anderen Werten von g/δ und $2r/\delta$) beobachtet worden.

Ich gebe von den zahlreichen anderen Beobachtungen nur die Schlussresultate für diese Differenz Δ und (angenähert) für $L/2l$ beob. an. Ein ! hinter dem Werte Δ , z. B. $\Delta = 1,69!$ für $n = 2$, bedeutet, dass die betreffende Spule eine genau constante Ganghöhe hatte, indem der Spulendraht in ein auf der Drehbank eingeschnittenes Gewinde des Spulenkernes eingelegt wurde. Die Werte Δ ohne ! beziehen sich auf Spulen, bei denen das nicht der Fall war, bei denen also die Ganghöhe g nicht so exact überall den angegebenen Wert hat.

Die über den Wert von Δ gesetzte Zahl bedeutet das Verhältnis g/δ , die unter Δ gesetzte Zahl das Verhältnis $2r/\delta$, die noch tiefer darunter, unter einen Strich gesetzte Zahl den (annähernden) Wert von $L/2l$ beob. Z. B. würde die erste Beobachtung der vorigen Tabelle bezeichnet werden durch:

$$\begin{array}{c} 5 \\ 1,88! \\ 73 \\ \hline 6,5 \end{array}$$

n	$A = L/2l$ ber. — $L/2l$ beob.								
2	1,2	2	2	2	3,5	5	5	5	11
	1,20	1,64!	1,44!	1,32	1,84!	1,79	1,88!	1,69!	1,96
	147	41	55	61	73	61	73	135	147
	9,1	6,0	6,8	7,2	6,7	6,2	6,4	7,9	7,2
3	1,2		2,2		3,5	4,5	5	5	
	1,39		1,37		1,83!	1,72	1,76!	1,80!	
	100		42		73	42	73	100	
	11,5		8,2		8,7	6,8	8,1	9,1	
4			2,2		3,5	4	5	5	
			1,46		1,80!	1,81	1,75!	1,78!	
			25		73	25	60	73	
			7,8		10,4	6,1	8,8	9,5	
5			2,2		3,5	4	5	5	
			1,52		1,43!	1,71	1,42!	1,62!	
			25		73	25	58	73	
			8,7		12,2	6,7	9,8	10,8	
6			2,2		3,5	4	5	5	
			1,29		1,52!	1,57!	1,28	1,61!	1,81!
			21		48	73	21	46	73
			8,6		11,0	13,4	6,5	9,2	11,5
7			2,2		3,5	4	5	5	
			1,31		1,27!	1,04!	1,47	1,46!	1,53!
			21		48	73	21	46	73
			9,1		12,0	15,0	6,6	9,8	12,6
8			2,2		3,5	4	5	5	
			1,15		1,18!	1,58	1,30!	1,52!	
			21		48	21	46	73	
			9,7		12,8	6,7	10,4	13,4	
9			2,2		3,5	4	5	5	
			1,20		1,34!	1,60	1,27!	1,63!	
			21		48	21	46	73	
			10,1		13,2	6,9	10,8	13,9	
10			2,1		3,5		5		
			1,49		1,79	1,37!	1,23!		
			21		21	48	46		
			10,4		7,4	13,7	11,1		

Ausser dem schon erwähnten Resultat, dass B mit wachsendem n etwas abnimmt, ergibt auch die Tabelle, dass bei constantem n , z. B. bei $n=2$, Δ mit wachsendem g/δ wächst, doch dies um so weniger, je grösser n ist. Indes ist consequentes Wachsen von B innerhalb der Grenzen $g/\delta = 3,5$ bis 5 aus der Tabelle nicht zu erkennen, sodass für dieses Intervall die Werte von B zu Mittelwerten vereinigt werden können.

Eine deutlich (in einheitlichem Sinne) erkennbare Abhängigkeit des Δ von $2r/\delta$ bei constantem n und constantem g/δ ist nicht zu erkennen. Vereinigt man die Werte B innerhalb $g/\delta = 3,5$ bis 5 zu Mittelwerten, so erhält man folgendes:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Δ	1,80	1,78	1,78	1,49	1,63	1,33	1,33	1,41	1,30

Gleicht man diese Werte graphisch durch eine Curve aus, und verfährt man ebenso mit den bei $g/\delta = 1,2$ und $g/\delta = 2$ bis 2,2 erhaltenen Werten, so erhält man folgendes Resultat:

Tabelle für Δ .

n	g/δ			
	1,2	2	3,5 bis 5	11
2	1,30	1,54!	1,80!	1,96
3	1,29	1,50	1,78!	—
4	—	1,43	1,74!	—
5	—	1,38	1,61!	—
6	—	1,32	1,50!	—
7	—	1,29	1,40!	—
8	—	1,28	1,35!	—
9	—	1,27	1,32!	—
10	—	1,26	1,30!	—

Die Werte von Δ für $g/\delta = 3,5$ bis 5 sind zuverlässiger als die anderen. Für Teslatransformatoren kommen auch gerade diese Intervalle g/δ wesentlich in Betracht.

Die Selbstinduction einer Spule von höchstens 10 Windungen bei Condensatorentladungen wird also durch die Formel dargestellt¹⁾:

$$(35) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{L}{2l} &= n \left\{ \left(1 + \frac{h^2}{32 r^2} \right) \lognat \frac{8r}{\sqrt{h^2 + \delta^2}} - y_1 + \frac{h^2}{16 r^2} y_2 \right\} \\ &+ \lognat g/\delta - \Delta, \end{aligned} \right.$$

wobei y_1 und y_2 aus folgender (Stefan'schen) Tabelle zu entnehmen sind:

δ/h	y_1	y_2	δ/h	y_1	y_2
0,00	0,500	0,13	0,55	0,808	0,34
0,05	0,549	0,13	0,60	0,818	0,38
0,10	0,592	0,13	0,65	0,826	0,43
0,15	0,631	0,14	0,70	0,833	0,47
0,20	0,665	0,15	0,75	0,838	0,52
0,25	0,695	0,17	0,80	0,842	0,58
0,30	0,722	0,19	0,85	0,845	0,63
0,35	0,745	0,22	0,90	0,847	0,69
0,40	0,765	0,24	0,95	0,848	0,75
0,45	0,782	0,27	1,00	0,848	0,82
0,50	0,796	0,31			

(Für $n = 1$, $h = 0$, $g/\delta = 1$ geht Formel (35) in Formel (28) für den einfachen Kreis über, wenn man für diesen Fall $\Delta = 0,81$ setzt.)²⁾

Berechnet man nach (35) und der auf p. 603 für Δ gegebenen Tabelle den Wert $L/2l$, so erhält man von den auf p. 602 beobachteten Werten $L/2l$ Abweichungen, die für $g/\delta = 3,5$ bis 5 bei den Werten ! in 11 Fällen 1 Proc. überschreiten (aber höchstens $2\frac{1}{2}$ Proc. betragen), während sie in 19 Fällen unter 1 Proc. bleiben. Formel (35) wird daher für $g/\delta = 3,5$ bis 5 den Wert der Selbstinduction bis auf etwa 1 Proc. genau darstellen, bei den anderen Werten g/δ bis auf etwa 2 Proc.

1) In dieser Formel ist der Term $\frac{1}{3} \delta^2 : 32 r^2$ gegen 1 vernachlässigt, weil die Formel nur eine Genauigkeit von etwa 1 Proc. zu erreichen beansprucht, und δ/r in praxi stets weit kleiner als 1 ist.

2) Dieser Wert steht mit der Tabelle der Δ nicht im Widerspruch, da Δ mit gegen 1 abnehmendem g/δ stark abnimmt.

20. Prüfung und Anwendung der Formeln bei zwei Teslatransformatoren.

a) Die Secundärspule eines Teslatransformators bestand aus 268 Windungen von 1 mm starkem Kupferdraht, der auf einen Ebonithohlcyylinder von 8 mm Wandstärke und 6,4 cm äusserem Durchmesser aufgewunden war. Die Spulenhöhe betrug $h = 43$ cm, die Drahtlänge $l = 5480$ cm, die Ganghöhe $g = 1,6$ mm. Da der Spulendurchmesser gleich $6,4 + 0,1 = 6,5$ cm ist, so ist $h:2r = 6,6$. Bei diesem Verhältnis $h/2r$ und dem Wert $g/\delta = 1,6$ würde nach Tabelle p. 322 der Parameter f den Wert 0,66 für einen Hohlkern, den Wert 0,71 für einen Vollkern besitzen. Der vorliegende Spulenkern nähert sich, da seine Wandstärke $\frac{1}{8}$ des Spulendurchmessers beträgt, mehr dem Ebonitvollkern, es ist also etwa $f = 0,70$ anzunehmen. Daher wird die halbe Eigenwellenlänge der Secundärspule

$$\frac{1}{2}\lambda = l \cdot f = 3840 \text{ cm.}$$

Die Primärspule bestand aus fünf Windungen von 1,4 mm dickem Draht und hatte folgende Constanten:

$$n = 5, h = 4,5 \text{ cm, } 2r = 12,4 \text{ cm, } \delta = 1,4 \text{ mm,}$$

$$g = 1,1 \text{ cm, } l = 195 \text{ cm.}$$

Da $\delta/h = 0,031$ ist, so hat in Formel (35) y_1 und y_2 die Werte: $y_1 = 0,53$, $y_2 = 0,13$ (nach Tabelle p. 603). Da ferner $g/\delta = 7,85$ ist, und $n = 5$, so hat Δ in Formel (35) nach Tabelle p. 602 etwa den Wert 1,67. (Die Unsicherheit von $\frac{1}{100}$, d. h. die Annahme $\Delta = 1,72$, macht erst $\frac{1}{2}$ Proc. Fehler in Berechnung der Selbstinduction L aus). Daher ist nach (35)

$$\frac{L}{2l} = 9,94, \text{ d. h. } L = 3875.$$

Diese Spule war nun an zwei gegenüberliegenden Stellen geöffnet¹⁾ zu vier geraden Drähten, von denen zwei zur Zinkfunkenstrecke führten (Länge l der Drähte 7 cm, mittlerer Abstand $d' = 5$ cm, Drahtdicke $2\varrho' = \delta = 1,4$ mm), während die zwei anderen zu den Belegungen einer kleinen Leydener Flasche führten ($l = 9$ cm, $d' = 10$ cm, $2\varrho' = \delta = 1,4$ mm). Daher kommen nach Formel (29) p. 596 zu L noch die beiden

1) Die Schaltung ist genau von mir beschrieben in Ann. d. Phys. 8. p. 336. 1902.

Beträge hinzu: $L' = 120$ cm und $L'' = 179$ cm, sodass die gesamte Selbstinduction des Primärkreises den Wert hat $L_1 = 4174$ cm.

Die Leydener Flasche hatte 10,2 cm Belegungshöhe, 6 cm inneren Durchmesser, 2,6 cm Glasdicke. Die Grösse des inneren Stanniobelags ist daher $S = \pi(6 \cdot 10,2 + 3^2) = \pi \cdot 70$ cm², und $S : 4\pi d = 70 : 1,04 = 67,5$ cm. Die Leydener Flasche war so ausgesucht, dass der Transformator gut wirkte, d. h. es war annähernd¹⁾ Resonanz zwischen Primärkreis und Secundärkreis hergestellt. Die Capacität C , welche mit der Selbstinduction $L = 4174$ die halbe Wellenlänge $\frac{1}{2}\lambda = 3840$ cm der Secundärspule erzeugt, berechnet sich nach (27') p. 593 zu $C = 358$. Da nun für die Leydener Flasche $C = \epsilon \cdot S : 4\pi d$ zu setzen ist, falls ϵ die Dielektricitätsconstante des Glases bedeutet, so würde sich dies ϵ berechnen zu

$$\epsilon = 358 : 67,5 = 5,31.$$

In der That hat Löwe²⁾ mit schnellen elektrischen Schwingungen Dielektricitätsconstanten beobachtet, welche je nach der Glassorte zwischen 5 und 7,7 lagen.

Diese Berechnung zeigt also hiermit Übereinstimmung, soweit man sie nur erwarten kann, zumal die Abstimmung des Primärkreises auf den Secundärkreis durchaus roh gemacht war³⁾ und (vgl. Anm. 1) wahrscheinlich der Primärkreis etwas grössere halbe Wellenlänge als $\frac{1}{2}\lambda = 3840$ besass, daher war auch C vielleicht etwas grösser als 358 und ϵ etwas grösser als 5,31.

b) Bei einem zweiten kleineren Teslatransformator bestand der Secundärkreis aus 127 Windungen von 1 mm starkem Kupferdraht, welcher ebenfalls auf einem Ebonithohlcyliner

1) Die stärkste Wirkung zeigt allerdings ein Teslatransformator, wenn der Primärkreis eine ein wenig langsamere Eigenperiode besitzt, als der Secundärkreis, wie ich in einem späteren Aufsatz darzuthun gedenke. Indes ist diese Abweichung der Eigenschwingungsdauern beider Kreise nicht bedeutend und nur bei sehr starker Koppelung, d. h. grosser Nähe von Primärkreis und Secundärkreis, bemerklich. Bei vorliegendem Transformator ist diese Abweichung unter 5 Proc. zu taxiren.

2) K. F. Löwe, Wied. Ann. 66. p. 390. 1898.

3) Zur Herstellung von Teslatransformatoren braucht diese Abstimmung nicht genau zu sein, um so weniger, je stärker die magnetische Koppelung zwischen Primär- und Secundärkreis ist.

von 8 mm Wandstärke aufgewickelt war. Aus $h = 24,8$ cm, $2r = 6,5$ cm, d. h. $h/2r : 4$, $g/\delta = 2$ bestimmt sich nach Tabelle p. 322 f zu 0,81, d. h.

$$\frac{1}{2}\lambda = l \cdot f = 2590 \cdot 0,81 = 2100 \text{ cm.}$$

Die Primärspule hatte die Constanten

$$n = 3, \quad h = 4,5 \text{ cm}, \quad 2r = 12,7 \text{ cm}, \quad \delta = 1,4 \text{ mm}, \quad g = 2,2 \text{ cm}, \\ l = 120 \text{ cm.}$$

Daher ist nach (35) (Δ ist zu 1,92 angenommen, da $g/\delta = 16$ betrug) $L = 1590$ cm. Die Zuleitungen zu der Spule ($l' = 7$ cm, $d' = 6$ bez. 8 cm) geben noch die Beträge $L' = 124$ bez. $L' 132$, sodass $L_1 = 1846$ cm betrug. Bei Resonanz mit dem Secundärkreis musste daher die Capacität der Leydener Flasche betragen $C = 242$ cm. Ihre Belegungen waren 6,8 cm hoch, der innere Durchmesser 5,5 cm, die Glasdicke 2,6 mm, daher $S : 4\pi d = 43,2$ cm. Daher folgt

$$\epsilon = 242 : 43,2 = 5,60.$$

Die Eigenschwingungsdauer des Primärkreises wurde nun auch direct gemessen nach der oben p. 598 erwähnten Methode¹⁾, indem die Secundärspule des Transformators entfernt wurde und die Zinkfunkenstrecke des Primärkreises durch ein Inductorium oder durch einen anderen Teslatransformator gespeist wurde und nun die im Primärkreis erzeugten Schwingungen schwach inductiv wirkten auf eine Secundärleitung, die aus der oben p. 598 beschriebenen Leitung aus zwei 1 mm dicken, parallelen Drähten in 2,65 cm Distanz bestand, über die ein beweglicher Metallbügel B verschoben werden konnte. Am anderen Ende waren die Paralleldrähte rechtwinklig umgebogen und waren — schwach federnd — angelegt gegen die Platten eines Kreisplattencondensators von 12,1 cm Durchmesser und 1 mm Plattendicke, dessen Platten durch drei Ebonitplättchen von (im Mittel) 0,53 mm Dicke und 9 mm² Grösse getrennt waren. Die Capacität C dieses Condensators berechnet sich nach der Formel auf p. 299 zu $C = 177,6$ cm. An die eine Platte dieses Condensators wurde eine Zehnder's-

1) Diese Methode eignet sich also auch für so lange Wellen, wie sie bei Teslatransformatoren erzeugt werden, sehr bequem zur Frequenzbestimmung der Schwingungen.

sche Vacuumröhre angelegt, und der Bügel *B* mit der Hand den Paralleldrähten entlang verschoben. Bei einer ziemlich¹⁾ scharf bestimmbaren Resonanzlage von *B* leuchtete die Vacuumröhre hell auf. Die Länge *a* dieser rechteckigen Secundärleitung betrug dann $a = 157$ cm. Die Gesamtlänge der Secundärleitung war $l = 2.157 + 2,65 + 2,35 = 319$ cm. Daher ist die Selbstinduction derselben nach Formel (33) auf p. 597 $L = 2520$ cm. Die halbe Eigenwellenlänge der Secundärleitung, d. h. also auch der Primärleitung, beträgt daher nach Formel (26) auf p. 593 $\frac{1}{2}\lambda = 2120$ cm. Es ergibt sich also in der That für $\frac{1}{2}\lambda$ ein Wert, welcher sehr gut mit der p. 607 berechneten halben Eigenwellenlänge der Secundärspule des Teslatransformators übereinstimmt. — Mit Zugrundelegung der Zahl $\frac{1}{2}\lambda = 2120$ cm berechnet sich die Capacität der Leydener Flasche des Primärkreises des Teslatransformators zu 246 cm, d. h. die Dielektricitätsconstante ϵ des Glases der Leydener Flasche zu $\epsilon = 246 : 43,2 = 5,7$.

Zusammenfassung der Resultate.

1. *Die Eigenperiode einer Spule wächst mit der Dielektricitätsconstante des Spulenkernes und der seiner Umgebung (Oeltransformator).*

2. Die Dielektricitätsconstante des Ebonits für Hertz'sche Schwingungen ist $\epsilon = 2,79$. Ebonit ist elektrisch isotrop.

3. Wenn die Ganghöhe der Mittelwindungen einer Spule kleiner ist, als die der Endwindungen, so wird die Eigenperiode der Spule langsamer als im umgekehrten Falle oder bei constanter Ganghöhe.

4. *Die halbe Eigenwellenlänge $\frac{1}{2}\lambda$ einer Spule constanter Ganghöhe *g* hängt von der Spulendrahtlänge *l*, der Spulenhöhe *h*,*

1) Die Resonanzlage ist wegen der an den Belegungen aussprühenden Büschelentladungen nicht so scharf zu bestimmen, als wenn man einen Petroleum- oder Luftcondensator verwendet. Vielleicht stört auch etwas elektrische Absorption im Glase der Leydener Flasche. Löwe (l. c.) hat allerdings für viel schnellere Schwingungen keine elektrische Absorption im Glase nachweisen können.

dem Spulendurchmesser $2r$, der Drahtdicke δ in der Weise ab, dass ist

$$\frac{1}{2}\lambda = lf(h/2r, g/\delta, \epsilon),$$

wobei ϵ die Dielektricitätsconstante des Spulenkernes bedeutet. Auf p. 322 u. 323 sind Tabellen von f für praktisch vorkommende Fälle (auch für Spulen auf Hohlcylindern und für kernlose Spulen) aufgestellt.

Innerhalb gewisser Grenzen ist $f \cdot \sqrt{h/r}$ constant. Auf p. 329 sind die Zahlenwerte dieses Productes angegeben, aus dem daher ebenfalls $\frac{1}{2}\lambda$ bequem berechnet werden kann.

5. Die halbe Eigenwellenlänge eines nahezu zum Kreise geschlossenen dünnen Drahtes ist um $6\frac{1}{3}$ Proc. grösser, als die Drahtlänge.

6. Die Oberschwingungen einer Spule sind nicht harmonisch zur Grundschiwingung, und das Verhältnis der Schwingungszahlen von Grundschiwingung zu den Oberschwingungen hängt etwas vom Verhältnis $h/2r$ ab. Es treten die sämtlichen denkbaren Oberschwingungen auf (mit abnehmender Intensität), d. h. die erste Oberschwingung erzeugt zwei Stromböuche in der Spule, die zweite drei Stromböuche etc. Bei den Oberschwingungen schwingt die Spule nicht in congruenten Teilen.

7. Durch Anlegung einer Capacität an ein freies Spulenende wird die Eigenperiode der Grundschiwingung einer Spule in einer nach p. 337 berechenbaren und experimentell bestätigten Weise vergrössert. Diese Vergrösserung ist stets kleiner, als das Doppelte der Periode der Spule mit freien Enden.

8. Auf p. 604 ist eine Formel aufgestellt zur Berechnung der Selbstinduction kurzer, weiter Spulen für schnelle Stromwechsel.

9. Durch diese Formel und die Tabellen p. 322, 323 oder p. 329 ist die Möglichkeit gegeben, zu jedem Teslatransformator die geeignete Capacität des Primärkreises zu berechnen. Wenn die Secundärspule des Teslatransformators nicht frei endigt, sondern mit einer oder mit zwei Capacitäten verbunden wird, so ist die beste Capacität des Primärkreises grösser zu wählen, und ebenfalls aus vorstehenden Daten im voraus zu berechnen. Zwei Stichproben an zwei verschiedenen Teslatransformatoren bestätigen die Anwendbarkeit der Formel und der Tabellen. —

Eine Erdung des einen Endes der Secundärspule des Teslitransformators liefert keine definiten Verhältnisse.¹⁾

10. *Secundärspulen auf Holz oder Pappröhren sprechen nicht so gut an* (wegen elektrischer Absorption im Holz oder in der Pappe), *als Spulen auf Ebonit, oder Glas, oder kernlose Spulen.* Erstere sind daher zur wirksamsten Construction der Teslitransformatoren nicht so günstig, als letztere. — *Ebenso sind als Capacität des Primärkreises des Teslitransformators besser Metallplatten in Petroleumbad zu verwenden, als Leydener Flaschen,* wegen der Büschelentladungen an den Stanniolbelegungen (und vielleicht auch wegen elektrischer Absorption im Glase). — Der Primärkreis muss zweckmässig aus wenig Windungen (1—3) dicken Drahtes (2—4 mm) bestehen (damit die Selbstinduction möglichst klein ist), der Secundärkreis wird zweckmässig aus dünnerem Draht ($\frac{1}{2}$ mm) gewickelt zu einer Spule, deren Höhe etwa das Doppelte ihres Durchmessers ist.²⁾

11. *Durch Anwendung eines im Flüssigkeitsbade hängenden Kreisplattencondensators* von 10 cm Radius, welcher oscillatorisch durch eine Kreisleitung von 21 cm Durchmesser und 3 mm Dicke entladen wird, *kann man durch Verändern der Plattendistanz des Condensators und der Flüssigkeit seines Bades die Wellenlänge stetig in grossem Intervall* von 3 m (5 cm Plattendistanz, Luft zwischen Condensatorplatten) bis zu 133 m (1 mm Plattendistanz, Wasser zwischen Condensatorplatten) *verändern.*

Bei Wasserfüllung muss zur Einleitung des Funkenspieles des Erregers ein Teslitransformator verwendet werden. (Derselbe ist in jedem Falle günstig.)

Giessen, Juni 1902.

1) Vgl. F. Braun, Ann. d. Phys. 8. p. 209. 1902.

2) Ich nehme dieses Resultat theoretischer Betrachtungen, die ich später veröffentlichen werde, vorweg.

(Eingegangen 26. Juni 1902.)

5. *Resonanzmethode zur Bestimmung der Periode
der oscillatorischen Condensatorentladung;
von P. Drude.*

Durch die Braun'sche Anwendung der oscillatorischen Condensatorentladung zum Zwecke der drahtlosen Telegraphie ist eine bequeme Methode zur Periodenbestimmung schneller Schwingungen, deren Wellenlänge etwa 10—100 m beträgt, praktisch wichtig geworden. Wenn man absieht von der Methode des rotirenden Spiegels, die jedenfalls nicht bequem zu nennen ist und der Methode der Braun'schen Röhre, welche für schnelle Schwingungen noch nicht mit Erfolg benutzt ist, so hat zuerst Braun in seinem Buche „Drahtlose Telegraphie“ 1901 dazu einen Weg angegeben, der von Mandelstamm¹⁾ weiter verfolgt ist, und der darin besteht, dass der oscillirende Strom sich gabelt zwischen einer Selbstinduction und einem möglichst selbstinductionsfreien Widerstande, und letzterer so abgeglichen wird, dass in beiden Zweigen gleiche Stromstärke besteht.

Dieselbe Methode hat etwas später Marx angegeben²⁾ (allerdings zunächst ohne Messresultate).

Wie aber in beiden Arbeiten schon hervorgehoben ist, muss man beachten, dass durch Einschaltung des Messinstrumentes nicht die zu messende Periode des Wechselstromes geändert wird und eventuell dementsprechende Correctionen anbringen. Auch zeigen die bisher nur von Mandelstamm publicirten Messresultate keine grosse Uebereinstimmung zwischen Theorie und Experiment. Letzteres giebt nämlich bei der zweiten Modification der Methode, welcher Mandelstamm den Vorzug giebt, bei der nämlich die Selbstinduction in dem

1) L. Mandelstamm, Dissert. Strassburg 1902; Ann. d. Phys. 8. p. 123. 1902.

2) E. Marx, Sächs. Ber. d. math.-phys. Kl. October 1901.

einen Zweige durch eine Capacität ersetzt ist, durchweg¹⁾ grössere Perioden, als die Theorie.

Wenn nun auch bei geeignet gewählten Verhältnissen nach jener Methode sich vielleicht noch eine bessere Uebereinstimmung zwischen Experiment und Theorie erzielen lässt, so scheint mir doch diese Methode nicht so bequem in der Schaltung und Berechnung und nicht so exact in den Resultaten als die Resonanzmethode, welche ich in vorstehender Arbeit²⁾ angewendet habe.

Das Princip ist sehr einfach:

1. Für kurze Wellen, deren Wellenlänge unter etwa 12 m liegt, erregt der primäre Condensatorkreis, dessen Periode man bestimmen will, eine aus zwei 1 mm dicken genau parallelen Kupferdrähten bestehende Secundärleitung, welche an einem Ende metallisch fest geschlossen ist, während man nach dem anderen Ende zu einen geraden Metallbügel *B* so lange verschiebt, bis dass die Secundärleitung in Resonanz steht mit der Primärleitung. Dies wird daran erkannt, dass eine über die Paralleldrähte möglichst in der Mitte zwischen beiden Enden aufgelegte Vacuumröhre maximal leuchtet.³⁾ Die Wellenlänge ist gleich der ganzen Länge der Secundärleitung, d. h. doppelte Länge der Paralleldrähte vermehrt um doppelte Länge des Bügels *B*, vermehrt um 3 cm, welche der Capacität im leuchtenden Vacuum entspricht. Die Paralleldrähte dürfen nicht nahe (nicht unter 6 cm Distanz) über einen Holzmaassstab ausgespannt werden, weil sonst die Wellenlänge wegen der Dielektricitätsconstante des Holzes grösser ist.

1) Diese Differenz, die nach Mandelstamm bei Anwendung von Spulen 2—8 Proc. beträgt, ist thatsächlich deshalb noch grösser, weil Mandelstamm zur Berechnung der Selbstinduction der Spulen Formeln benutzt, welche für schnelle Stromwechsel, wie sie bei Condensator-entladungen vorliegen, zu grossen Wert der Selbstinduction ergeben (vgl. meine vorstehende Arbeit). Bei der Benutzung eines quadratförmigen Schliessungsdrahtes, dessen Selbstinduction auch für Hertz'sche Schwingungen bekannt war, ergab sich die Differenz zwischen Experiment und Theorie zu 12 Proc. Diese grosse Differenz mag allerdings durch ungünstig kleine Selbstinduction veranlasst sein.

2) P. Drude, Ann. d. Phys. 9. p. 293. 1902.

3) Das Zimmer ist zu verdunkeln.

Eine Stellung, in welcher eine solche inductive Erregung eintritt, ist in jedem Falle sofort angebbar, wenn man nur den Verlauf der magnetischen Kraftlinien des Primärstromes berücksichtigt. Induction tritt ein, wenn diese magnetischen Kraftlinien die von der Secundärleitung umrandete Fläche durchsetzen, und zwar ist die Induction um so wirksamer, je mehr diese Durchsetzung mit magnetischen Kraftlinien des Primärstromes an einem der metallisch überbrückten Enden der Secundärleitung stattfindet, d. h. an Stellen der Strombäuche. Solche Stellungen sind daher sowohl bei nahezu geschlossener Primärleitung sofort angebbar (Ebenen beider Leitungen parallel), als auch bei offener Primärleitung, wenn z. B. an den Condensator ein frei endigender gerader Draht angehängt ist. In diesem letzteren Falle braucht z. B. die Secundärleitung nur diesem Drahte parallel gelegt zu werden, und zwar so, dass die beiden Secundärdrähte einen verschiedenen Abstand vom Primärdraht haben.

Die magnetische Koppelung zwischen beiden Systemen kann man sehr verstärken, wenn man den Abstand beider Systeme klein wählt, und den Drahtabstand der beiden Paralleldrähte gross. Indess ist es nicht günstig, mit grosser magnetischer Koppelung zu arbeiten, sondern im Gegenteil muss dieselbe möglichst klein gewählt werden, sodass nur noch die Vacuumröhre im Resonanzfalle deutlich anspricht. Denn die Resonanzlage des Bügels B ist um so schärfer ausgeprägt, je kleiner die magnetische Koppelung beider Systeme ist. Ich benutze daher für die Secundärleitung nur einen Abstand von 2–3 cm ihrer Paralleldrähte. Man wird dann zur ersten Orientirung über die Wellenlänge des Primärkreises denselben in die Nähe der Secundärleitung bringen, und dann diese Distanz, wenn man die Resonanzlage des Bügels B annähernd kennt, so weit vergrössern, dass die Vacuumröhre noch deutlich anspricht. Als letztere sind zu empfehlen Röhren mit Luftfüllung, in denen der Sauerstoff durch einen dünnen Belag elektrolytisch eingeführten Natriums entfernt ist. Irgend welche Elektroden in der Vacuumröhre sind nicht notwendig.¹⁾ Solche

1) Abgesehen von einer Elektrode, die bei der Herstellung zur elektrolytischen Einführung des Natriums notwendig ist.

Röhren werden vom Glasbläser Kramer in Freiburg i. B. angefertigt (für etwa 15 Mark). Auch andere mit Luft ohne Natrium beschickte Röhren, die etwa zu 1 mm Quecksilberdruck ausgepumpt sind, leisten diese Dienste, nur ist ihr Ansprechen nicht ganz so regelmässig.

Wenn keine Dämpfung der Primärschwingungen durch elektrische Absorption in dem Dielektricum des Condensators (Glas) oder durch Büschelbildung an seinen Metallbelegen¹⁾ hervorgebracht wird, so kann man nach dieser Methode die Wellenlänge der Primärschwingung durch vier Einstellungen des Bügels *B* auf maximales Leuchten der Vacuumröhre auf $\frac{1}{4}$ Proc. Genauigkeit ermitteln. Aber auch bei Verwendung einer Leydener Flasche als Primärcondensator ist die Genauigkeit immer noch 1 Proc.

Wenn das Zimmer genügend lang ist (6—7 m), so kann man nach dieser Methode die Wellenlänge bis zum Betrage von etwa 12 m ermitteln. In diesem Falle liegt die Vacuumröhre 3 m entfernt vom Bügel *B*. Grössere Distanz ist unpraktisch, weil dann ein einzelner Beobachter, welcher den Bügel *B* verschiebt, nicht gut mehr das Leuchten der Vacuumröhre beurteilen kann.

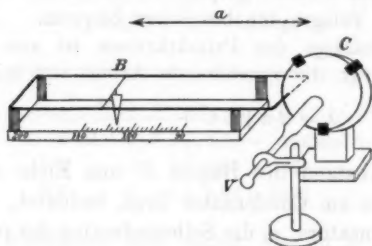
2. Für längere Wellen, deren Wellenlänge über 12 m beträgt, ist als Secundärleitung zu verwenden eine Parallelleitung aus zwei 1 mm dicken Drähten in 2—3 cm Abstand, befestigt über einen 2 m (in Millimeter geteilten) langen Holzmaassstab.²⁾ An dem einen Ende sind die Drähte rechtwinklig umgebogen und federn³⁾ gegen die Platten eines Condensators *C*, welcher dadurch hergestellt wird, dass zwei gut eben geschliffene, roh polirte kreisförmige Metallplatten von etwa 12 cm Durchmesser

1) Beides ist zu vermeiden, wenn als Condensator zwei Metallplatten im Petroleumbade verwendet werden.

2) Der Abstand der Drähte über dem Holzmaassstabe kann bei dieser Methode beliebig klein sein, ohne Fehler herbeizuführen.

3) Praktisch lötet man an der Aussenseite der Condensatorplatten zwei 1 mm kurze, 2 mm dicke Stücke Kupferdraht an, in die man kleine Halbkugeln bohrt, zur Aufnahme eines Quecksilbertröpfchens. In dieses tauchen die federnden Drähte der Secundärleitung. Dadurch ist guter Contact gewahrt. Bei schlechtem metallischen Contact spricht die Secundärleitung nicht an.

durch drei kleine Ebonitplättchen von etwa 4 mm² Grösse und 1— $\frac{1}{2}$ mm Dicke einen genau messbaren Abstand voneinander erhalten. Zunächst wird, nachdem die Dicke der Ebonitplättchen bis auf 1 Proc. Genauigkeit ermittelt ist, die eine der Condensatorplatten horizontal gelegt, dann (nach Entfernung von Staub) die (staubfreien) drei Ebonitplättchen in drei Punkten in der Nähe des Randes aufgelegt, und nun die zweite (staubfreie) Condensatorplatte darüber gelegt, sodass die Kreisränder beider Condensatorplatten sich genau gegenüberstehen. Nun werden an den Stellen, an welchen die Ebonitplättchen liegen, drei kleine Ebonitstücke über die beiden Condensatorplatten geschoben, welche durch ihren knapp passenden Einschnitt die beiden Condensatorplatten mit mässigem Druck zusammenpressen und ermöglichen, den Condensator in beliebiger Lage



zu verwenden, z. B. auch so, dass die Condensatorplatten vertical stehen. Zu letzterem Zwecke trägt die *eine* Condensatorplatte an ihrer Aussenseite in der Mitte eine Schraube, oder ein Muttergewinde, mit Hülfe dessen sie an einen Halter anzuschrauben ist. Die Figur zeigt z. B. die Anordnung bei dieser Lage des Condensators.

Ueber den Paralleldrähten ist ein 1 mm dicker Metallbügel *B* zu verschieben; derselbe trägt in der Mitte einen kleinen Senkel, der knapp über der Millimeterteilung des Holzmaassstabes spielt, und so die Stellung des Bügels *B* auf mindestens 1 mm genau abzulesen erlaubt. Damit dieser Bügel *B* eine Parallelverschiebung erfährt, kann er zur Führung zwei kleine Metallröhrchen an seinen Enden tragen, doch ist dies für die meisten Zwecke nicht nötig, da meistens die Lage des Bügels *B* nicht auf 1 mm genau bestimmt zu werden braucht.

Eine Vacuumröhre (ohne Elektroden) wird nun gegen die eine Metallplatte des Condensators geschoben in einer aus der Figur zu ersehenden Lage, die Secundärleitung in eine Stellung gebracht, in der sie von der Primärleitung inductiv erregt wird, und der Bügel B auf Resonanz eingestellt, was man am maximalen Leuchten der Vacuumröhre erkennt. Wenn man sich mit weniger Genauigkeit (die aber immer noch auf mindestens 2 Proc. geht) begnügen will, so braucht man anstatt der Vacuumröhre nur das Funkenspiel zwischen den beiden Platten des Condensators C zu beobachten, welches im Resonanzfalle bei $\frac{1}{2}$ —1 mm Plattendifferenz von C stets einsetzt, wenn die inductive Erregung der Secundärleitung durch die Primärleitung nicht zu schwach gewählt wird. Diese Beobachtung des Funkenspieles kann auch im nicht verdunkelten Zimmer und im Freien geschehen, ist also für die Zwecke der drahtlosen Telegraphie besonders bequem.

Die Wellenlänge des Primärkreises ist aus der Formel zu berechnen (vgl. die vorstehende Arbeit von mir)

$$(1) \quad \lambda = 2\pi \sqrt{LC} + \frac{\pi}{3} \frac{a^2}{\sqrt{LC}},$$

wobei a den Abstand des Bügels B vom Ende der Parallelleitung, welches am Condensator liegt, bedeutet, C die Capacität des Condensators, L die Selbstinduction der (rechteckigen) Secundärleitung. Es ist¹⁾

$$(2) \quad C = \frac{r^2}{4d} + \frac{r}{4\pi} \left(\lognat \frac{16\pi r(d+\delta)}{d^2} - 1 + \frac{\delta}{d} \lognat \frac{d+\delta}{\delta} \right),$$

wobei r den Radius der Condensatorplatten, d ihren Abstand, δ die Dicke der Condensatorplatten (am Rande) bedeutet. Letztere ist z. B. gleich 1 mm zu wählen (während die Condensatorplatten in der Mitte dicker sein können; sie sind zweckmässig mindestens 2 mm dick, damit sie sich nicht verbiegen).

Wählt man z. B. Condensatorplatten von 12 cm Durchmesser, d. h. $r = 6$, so ist (für $\delta = 1$ mm)

$$\text{bei } d = 1 \text{ mm: } C = 90 + 4 = 94 \text{ cm,}$$

$$,, \quad d = \frac{1}{2} \text{ mm: } C = 180 + 4,6 = 184,6 \text{ cm.}$$

1) Die Correction wegen Vergrößerung der Capacität durch die drei Ebonitplättchen fällt unter 0,2 Proc.

Ferner ist (vgl. vorstehende Arbeit von mir)

$$(3) \quad L = 2l \left(\log \text{nat} \frac{b}{\varrho} - 1,31 \frac{b}{a} + 1,06 \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right),$$

wobei bedeutet: a den Abstand des Bügels B vom Ende der Leitung (längere Rechteckseite), b die Axendistanz beider Paralleldrähte (kürzere Rechteckseite), ϱ den Drahtradius (halbe Drahtdicke), l die Länge der ganzen, durch B abgegrenzten Secundärleitung, wobei (bei kurzen Längen a) Rücksicht zu nehmen ist darauf, dass die eine kürzere Rechteckseite der Leitung durch den Condensator C unterbrochen ist auf eine Distanz $d + 2\delta$; es ist also:

$$l = 2(a + b) - (d + 2\delta).$$

Für $b = 3$ cm, $\varrho = \frac{1}{2}$ mm erhält man z. B.

$$\log \text{nat} \frac{b}{\varrho} = 4,09,$$

und:

a	L
10 cm	$2l \cdot 3,79 = 195$ cm
100	$2l \cdot 4,05 = 1670$
200	$2l \cdot 4,07 = 3305$

Aus (1) berechnen sich daher die zu a zugehörigen λ wie folgt:

a	Mit $C = 94$ cm		Mit $C = 184,6$ cm	
	\sqrt{LC}	λ	\sqrt{LC}	λ
10 cm	135	848 cm	190	1192 cm
100	396	2515	555	3496
200	557	3572	780	4951

Man kann also durch Anwendung eines Condensators mit dem Plattenabstand $\frac{1}{2}$ mm ($C = 184,6$) bequem Wellenlängen von 12—50 m messen.

Will man noch längere Wellen messen, so kann man entweder grössere Condensatorplatten und eventuell längere Secundärleitung wählen, oder den Condensator mit dem Plattenabstand $d = \frac{1}{2}$ mm in Bäder tauchen von Flüssigkeiten, deren

Dielektricitätsconstanten man kennt. Zu dem Zwecke stellt man den Condensator mit je einem Halter in ein grösseres Glasgefäss, und giesst die betreffende Flüssigkeit hinein. Die Parallelleitung biegt man nach ihrem einen Ende zu in schwacher Krümmung nach abwärts, sodass ihre Enden gegen die oberen Ränder des Condensators *C* im Flüssigkeitsbade federnd angelegt werden können. Dadurch wird die Selbstinduction der Secundärleitung nicht merkbar verändert. Durch Benutzung eines Wasserbades (Dielektricitätsconstante gleich 81) können daher mit demselben Condensator Wellen bis zu 445 m Länge gemessen werden.¹⁾

Bei Flüssigkeitsbädern muss man zur Beobachtung des Funkenspiels im Resonanzfalle an den Condensatorplatten zwei aus dem Flüssigkeitsbade herausragende Drähte befestigen, zwischen deren Enden das Funkenspiel in Luft zu beobachten ist.²⁾ Oder man verwendet eine an eine Condensatorplatte aussen angelegte Vacuumröhre.

Das die hier dargelegte Methode praktisch wirklich anwendbar ist und richtige Resultate liefert, habe ich in vorstehender Arbeit³⁾ gezeigt, auch noch für Wellen von 46 m Wellenlänge.

Giessen, Juni 1902.

1) Die Anwendung von Flüssigkeitsbädern ist natürlich auch bequem, um in einem Erreger die Wellenlänge in grossen Intervallen stetig zu verändern, wie in vorstehender Arbeit gezeigt wurde.

2) Die Capacität der Drähte ist zu vernachlässigen gegenüber der des Condensators.

3) P. Drude, Ann. d. Phys. 9. p. 598. 1902 (Wellen von $\lambda = 9$ m bis $\lambda = 12$ m und p. 332 (Wellen von $\lambda = 46$ m).

(Eingegangen 26. Juni 1902.)

6. *Ueber die von einem elliptisch schwingenden
Ion emittirte und absorbirte Energie;
von Max Planck.*

(Aus dem Jubelband für H. A. Lorentz, Arch. Néerl. p. 164. 1900,
mitgeteilt vom Verfasser.)

Unter den Vorstellungen, welche man sich gegenwärtig von den Vorgängen bilden kann, die in den Centren der Emission und der Absorption der Licht- und Wärmestrahlung sich abspielen, besitzt durch ihre Einfachheit und Verwendbarkeit die grössten Vorzüge die namentlich von H. A. Lorentz ausgebildete Annahme, dass die Quelle aller Strahlungserscheinungen in schnellen Schwingungen discreter elektrisch geladener Teilchen, der Ionen oder Elektronen, besteht, welche ihre Schwingungsenergie durch Ausstrahlung dem umgebenden Aether mitteilen, und umgekehrt durch Absorption von ihm empfangen können. In den gewöhnlichen ponderablen Körpern hat man sich diese schwingenden Ionen sehr nahe aneinanderliegend zu denken, sodass die unmittelbar benachbarten mit sehr bedeutenden Kräften aufeinander wirken werden. Aber die Fähigkeit eines schwingenden Ions, Energie zu emittiren und auffallende Strahlung zu absorbiren, ist ihrem Wesen nach nicht notwendig an das Vorhandensein benachbarter Ionen, sondern vielmehr an die Schwingungsvorgänge des Ions selbst gebunden; und wenn man auch aus der Emission und Absorption eines einzelnen Ions noch keineswegs unmittelbar auf die entsprechenden Grössen in einem System von dicht aneinander gelagerten Ionen schliessen kann, so dürfte es doch als Vorarbeit für die Behandlung zusammengesetzter Fälle nützlich sein, die quantitative Berechnung der von einem einzelnen schwingenden Ion emittirten und absorbirten Energie auszuführen.

Zunächst soll über die Schwingungsform des Ions gar keine specielle Annahme gemacht werden. Die einzige Voraussetzung, von der wir ausgehen, ist, dass das im Vacuum befindliche Ion, mit einem anderen ruhenden Ion von gleicher

und entgegengesetzter Ladung zu einem Molecül vereinigt, schnelle Schwingungen ausführt und daher in jedem Augenblick mit jenem zusammen einen elektrischen Dipol vorstellt, von schnell wechselndem Moment, und dass die Dimensionen dieses Dipols beständig klein sind gegen die Länge der von ihm in das Vacuum ausgesendeten Welle, oder, für unperiodische Vorgänge, gegen diejenige Länge, welche erhalten wird, wenn man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes im Vacuum dividirt durch die „verhältnismässige Geschwindigkeit“ $1/X \cdot \partial X / \partial t$ der Schwingungen des Ions, wobei X irgend eine Schwingungscomponente bedeutet. Nur unter dieser Voraussetzung ist nämlich der elektrische Zustand des Molecüls durch sein elektrisches Moment als vollkommen bestimmt anzusehen, da sonst die elektrische Kraft eine merkliche Zeit brauchen würde, um sich von einer Stelle des Molecüls zu einer anderen fortzupflanzen, und nur unter dieser Voraussetzung kann man die elektrischen Vorgänge im umgebenden Felde immer in bestimmtem Sinne in eine „primäre“, von aussen auf das Ion fallende und dasselbe erregende, und in eine „secundäre“, vom Ion als Centrum ausgehende Welle zerlegen, ebenso wie auch nur dann die gesamte vorhandene Energie sich zerlegen lässt in einen Teil, der von dem augenblicklichen Schwingungszustand des Ions abhängt, und den wir die Schwingungsenergie des Ions nennen wollen, und in einen anderen Teil, den wir die Energie des umgebenden Feldes nennen.

Wir wollen uns zunächst mit der „secundären“, vom schwingenden Ion ausgehenden Welle beschäftigen, indem wir etwa annehmen, dass gar keine erregende Welle vorhanden ist und nur einfaches Abklingen stattfindet. Es handelt sich dann um die Berechnung der von dem schwingenden Ion emittirten Energie. Sei der Vector, welcher das elektrische Moment des im Anfangspunkt der Coordinaten befindlichen Dipols darstellt, mit m bezeichnet¹⁾; dann ist die von dem

1) Die Bezeichnungen schliessen sich ganz denen von H. A. Lorentz in seinem „Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern“ an, mit der alleinigen Ausnahme, dass ich hier, um den Zusammenhang mit meinen früheren Arbeiten aufrecht zu erhalten, für die elektrischen Grössen das elektrostatische Maasssystem benutze.

Molecül sich nach aussen fortpflanzende elektromagnetische Welle an irgend einem Ort x, y, z , dessen Entfernung r vom Molecül gross ist gegen die Dimensionen desselben, zu irgend einer Zeit t gegeben durch die Componenten der elektrischen Kraft¹⁾:

$$\mathfrak{F}_x = \frac{\partial S}{\partial x} - \Delta \left(\frac{m_x}{r} \right), \dots$$

und der magnetischen Kraft:

$$(1) \quad \begin{cases} \mathfrak{H}_x = \frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{m_z}{r} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{m_y}{r} \right) \\ = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{\dot{m}_z}{r} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\dot{m}_y}{r} \right), \dots \end{cases}$$

Hierbei ist

$$(2) \quad S = \frac{\partial}{\partial x} \frac{m_x}{r} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{m_y}{r} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{m_z}{r}$$

und in m_x, m_y, m_z ist, wie auch überall im Folgenden, statt des Argumentes t der Wert $t - r/V$ (V Lichtgeschwindigkeit) zu setzen, sodass jede dieser drei Grössen Function von $t - r/V$ ist.

Bedenkt man, dass:

$$\Delta \frac{m_x}{r} = \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{m_x}{r} = \frac{1}{V^2} \frac{\ddot{m}_x}{r},$$

so kann man auch schreiben:

$$(3) \quad \mathfrak{F}_x = \frac{\partial S}{\partial x} - \frac{1}{V^2} \frac{\ddot{m}_x}{r}, \dots$$

und erkennt, dass in der Nähe des Dipols, wo die Glieder mit der ersten Potenz von r im Nenner gegen die mit höheren Potenzen verschwinden, die elektrische Kraft \mathfrak{F} ein Potential hat, vom Werte:

$$-S = - \left(m_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + m_y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + m_z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right)$$

herrührend von dem elektrischen Moment m des Dipols.

1) H. A. Lorentz, l. c. p. 58, woselbst die Lösung für den allgemeineren Fall gegeben ist, dass das Molecül eine Translationsgeschwindigkeit \mathfrak{p} besitzt.

Emittirte Energie.

Um die von dem schwingenden Ion nach allen Richtungen emittirte Energie zu erhalten, legen wir um das Molecül eine Kugelfläche mit dem gegen seine Dimensionen grossen, aber gegen die Wellenlänge kleinen Radius r , und berechnen nach dem Poynting'schen Satz die in der Zeit dt nach aussen strömende Energie:

$$dE = dt \cdot \frac{V}{4\pi} \cdot \int [\mathfrak{F} \cdot \mathfrak{H}]_n d\sigma.$$

Der Ausdruck hinter dem Integralzeichen bedeutet die in der Richtung der äusseren Normale n von $d\sigma$, d. h. des Kugelradius r , genommene Componente des Vectorproductes aus elektrischer und magnetischer Kraft. Ordnen wir die Glieder nach den Componenten $\mathfrak{F}_x, \mathfrak{F}_y, \mathfrak{F}_z$ der elektrischen Kraft, so ergibt sich:

$$dE = dt \cdot \frac{V}{4\pi} \int d\sigma \left\{ \mathfrak{F}_x \left(\mathfrak{H}_y \frac{x}{r} - \mathfrak{H}_z \frac{y}{r} \right) + \dots \right\}$$

oder, mit Benutzung der aus (1) und (2) folgenden Identität:

$$\mathfrak{H}_y \frac{x}{r} - \mathfrak{H}_z \frac{y}{r} = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{m_x}{r} - \dot{S} \frac{x}{r} \right),$$

$$dE = \frac{dt}{4\pi} \int d\sigma \left\{ \mathfrak{F}_x \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{m_x}{r} - \dot{S} \frac{x}{r} \right) + \dots \right\}$$

Diese in der Zeit dt durch die Kugelfläche nach aussen strömende Energie dE ist aber nicht identisch mit der in derselben Zeit emittirten Energie. Denn sie enthält gewisse, und zwar sehr grosse Glieder, welche sich als vollständige Differentialquotienten nach der Zeit darstellen und deren zeitliches Integral daher nur von dem augenblicklichen Schwingungszustand des Dipols abhängt, d. h. ebenso wie das elektrische Moment m bald zu und bald abnimmt. Diese Energie strömt also durch die Kugelfläche hin und her, abwechselnd nach der einen und nach der anderen Seite, sie ist daher nicht der emittirten Energie, welche den Dipol dauernd verlässt und in das umgebende Feld übergeht, sondern der Eigenenergie des Molecules zuzurechnen, die sich abwechselnd auf grössere und kleinere Entfernungen vom Dipol hin verbreitet. Da es

sich hier nun lediglich um die Berechnung der endgültig emittirten Energie handelt, so sind in dem Ausdruck von dE alle diejenigen Glieder wegzulassen, welche als vollständige Differentialquotienten der Zeit dargestellt werden können. Allerdings liegt in dieser Abspaltung einzelner Glieder eine gewisse Unbestimmtheit, aber die damit verbundene Willkür wird um so geringer, für je grössere Zeiten man die emittirte Energie berechnet. Bei der Licht- und Wärmestrahlung spielt dieselbe wohl niemals eine Rolle, da hier für die emittirte Energie immer nur solche Zeiten in Betracht kommen, die gegen die Dauer einer Schwingung ungeheuer gross sind.

Ersetzt man nun in dem letzten Ausdruck von dE die elektrische Kraft $\mathfrak{F}_x, \mathfrak{F}_y, \mathfrak{F}_z$ durch ihre in (3) angegebenen Werte, so erhält man hinter dem Integralzeichen zunächst das Glied:

$$\frac{\partial S}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{\dot{m}_x}{r} - \dot{S} \frac{x}{r} \right) + \dots,$$

welches sich bei näherer Untersuchung als ein vollständiger Differentialquotient nach der Zeit t herausstellt, und zwar als der Differentialquotient der Function:

$$\frac{1}{2r} \cdot \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{m_x}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{m_y}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{m_z}{r} \right)^2 - S^2 \right\},$$

wie man auch durch Differentiation dieser Function nach t unter Berücksichtigung des Ausdruckes (2) von S erkennen kann.

Nach den obigen Ausführungen liefert dieses Glied keinen Beitrag zur emittirten Energie und kann daher weggelassen werden.

Der Rest von dE beträgt:

$$- \frac{dt}{4\pi V^2} \int d\sigma \left\{ \frac{\dot{m}_x}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{\dot{m}_x}{r} - \dot{S} \frac{x}{r} \right) + \dots \right\}.$$

Nun ist

$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{m_x}{r} = - \frac{m_x}{r^2} - \frac{1}{V} \frac{\dot{m}_x}{r}.$$

Folglich:

$$(4) \quad \frac{\partial}{\partial r} \frac{\dot{m}_x}{r} = - \frac{\dot{m}_x}{r^2} - \frac{1}{V} \frac{\ddot{m}_x}{r},$$

Die Einsetzung dieses Wertes in den Energieausdruck ergibt abermals ein Glied, welches einen vollständigen Differentialausdruck nach t darstellt, nämlich das Glied:

$$\frac{\ddot{m}_x}{r} \cdot \frac{\dot{m}_x}{r^2}$$

und daher wegzulassen ist. Es bleibt übrig:

$$\frac{dt}{4\pi V^3} \int d\sigma \{ \ddot{m}_x^2 + \ddot{m}_y^2 + \ddot{m}_z^2 + V\dot{S}(x\ddot{m}_x + y\ddot{m}_y + z\ddot{m}_z) \}.$$

Endlich führen wir die Componente des Momentes m in der Richtung r ein:

$$m_x \frac{x}{r} + m_y \frac{y}{r} + m_z \frac{z}{r} = m_r.$$

Dann ist

$$x\ddot{m}_x + y\ddot{m}_y + z\ddot{m}_z = r\ddot{m}_r$$

und mit Berücksichtigung von (2) und (4):

$$\begin{aligned} \dot{S} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\dot{m}_x}{r} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\dot{m}_y}{r} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\dot{m}_z}{r} \\ &= -\frac{\dot{m}_r}{r^2} - \frac{1}{V} \cdot \frac{\ddot{m}_r}{r}, \end{aligned}$$

wodurch sich, unter Weglassung eines weiteren Gliedes, die emittirte Energie in der Form ergibt:

$$\frac{dt}{4\pi V^3 r^3} \int d\sigma (\ddot{m}_x^2 + \ddot{m}_y^2 + \ddot{m}_z^2 - \ddot{m}_r^2),$$

oder kürzer geschrieben ¹⁾:

$$\frac{dt}{4\pi V^3 r^3} \int d\sigma (\ddot{m}^2 - \ddot{m}_r^2).$$

Hier können \ddot{m} und \ddot{m}_r , statt als Functionen von $t - r/V$, als Functionen von t allein angesehen werden, da nach der Voraussetzung r klein ist gegen die Wellenlänge. Dies Resultat lässt sich folgendermaassen in Worte fassen:

Die von einem elektrischen Dipol mit dem veränderlichen Moment m nach irgend einer Richtung r emittirte Energie ist proportional dem Quadrate der senkrecht zu r genommenen Componente des Vectors \ddot{m} . Da ferner m durch das Product der unveränderlichen Ladung des beweglichen Ions und seiner

1) \ddot{m} bedeutet nicht den zweiten Differentialquotienten der Grösse des Vectors m , sondern die Grösse des Vectors, welcher die Componenten \ddot{m}_x , \ddot{m}_y , \ddot{m}_z besitzt. (H. A. Lorentz, l. c. p. 10.)

Entfernung von dem entgegengesetzt geladenen als ruhend angenommenen Ion gegeben ist, so wird die Ausstrahlung in der Richtung r bedingt durch die senkrecht zu r genommene Componente der Beschleunigung des beweglichen Ions.

Zur Berechnung der Gesamtemission setzen wir den Winkel, welchen die Richtung des Vectors \ddot{m} mit r bildet, gleich ϑ , und

$$d\sigma = r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi.$$

Dann folgt für die ganze in der Zeit dt vom schwingenden Ion emittirte Energie:

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{dt}{4\pi V^3} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \ddot{m}^2 \sin^2 \vartheta = \frac{2}{3} \frac{dt}{V^3} \ddot{m}^2 \\ & = \frac{2}{3} \frac{dt}{V^3} (\ddot{m}_x^2 + \ddot{m}_y^2 + \ddot{m}_z^2). \end{aligned} \right.$$

Die nach allen Richtungen emittirte Energie setzt sich also additiv zusammen aus den von den drei linearen Schwingungen \ddot{m}_x , \ddot{m}_y , \ddot{m}_z emittirten Energien.

Vorstehendes Resultat wird sich jedenfalls noch leichter ableiten lassen, wenn man statt der rechtwinkligen Coordinaten x , y , z von vornherein Polarcoordinaten benutzt.

Absorbirte Energie.

Wenn das betrachtete Ion von einer im umgebenden Felde fortschreitenden elektromagnetischen Welle getroffen wird, so wird auf seine Ladung eine Kraft ausgeübt und dadurch Energie übertragen werden. Diese Energie, welche den Schwingungen des Ions zugeführt wird, geht der erregenden, primären Welle verloren und ist daher als von dem Ion absorbirt zu bezeichnen. Die Berechnung derselben ist sehr einfach. Nennen wir jetzt \mathfrak{F}_x , \mathfrak{F}_y , \mathfrak{F}_z die Componenten der elektrischen Kraft der erregenden Welle am Orte des Ions, wobei wir wieder voraussetzen, dass die Dimensionen der Bahn des Ions so klein sind, dass diese Grössen von ihr nicht abhängen, so ist die Arbeit, welche die erregende Welle an dem bewegten Ion in der Zeit dt leistet, nach unserer bisherigen Bezeichnung:

$$(6) \quad (\mathfrak{F}_x \ddot{m}_x + \mathfrak{F}_y \ddot{m}_y + \mathfrak{F}_z \ddot{m}_z) dt$$

und dies daher auch die von dem bewegten Ion in der Zeit dt absorbirte Energie. In der Licht- und Wärmestrahlung wird

diese Grösse gewöhnlich als wesentlich positiv angesehen; das ist aber nur dann zutreffend, wenn die absorbierte Energie nicht für ein Zeitelement, sondern für eine im Verhältnis zu einer Schwingungsperiode grosse Zeit genommen wird.

Elliptisch schwingendes Ion.

Die vollständigen Bewegungsgleichungen des Ions können erst dann aufgestellt werden, wenn die Abhängigkeit seiner Schwingungsenergie von seinem elektrischen Moment m und dessen zeitlichen Differentialquotienten \dot{m} bekannt sind. Der einfachste Fall, den wir wegen seiner Bedeutung für die Licht- und Wärmestrahlung im Folgenden noch kurz betrachten wollen, ist der der nahezu elliptischen Schwingung. Dieser Vorgang ist nahezu periodisch; er wird streng periodisch, wenn Energie im Ganzen weder emittiert noch absorbiert wird. Bei angenäherter Periodicität machen sich die Einflüsse der Emission und Absorption von Energie nur verhältnismässig langsam, erst nach Ablauf einer grossen Anzahl von Schwingungen, merklich geltend. Sehen wir zunächst von diesen Einflüssen ganz ab, so ist die Energie des schwingenden Ions constant zu setzen. Der Ausdruck derselben hat in dem betrachteten Falle die einfache Form:

$$\frac{1}{2} K (\dot{m}_x^2 + \dot{m}_y^2 + \dot{m}_z^2) + \frac{1}{2} L (m_x^2 + m_y^2 + m_z^2),$$

wobei K und L Constante. Die Bewegungsgleichungen des schwingenden Ions, ohne Dämpfung und ohne Erregung, sind dann:

$$K \ddot{m}_x + L \dot{m}_x = 0, \dots$$

Die Schwingungsdauer beträgt:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{K}}.$$

Ziehen wir nun die durch Energieemission verursachte Dämpfung in Betracht. Die Dämpfung bedingt in der Schwingungsgleichung ein Zusatzglied, sodass dieselbe lautet:

$$(7) \quad K \ddot{m}_x + L \dot{m}_x + M m_x = 0, \dots$$

Das letzte Glied entspricht der Dämpfung und ist bei angenäherter Periodicität klein gegen jedes der beiden ersten. Der Wert der positiven Constanten M ergibt sich durch

folgende Rechnung. Die in der Zeit T einer Schwingung verlorene Schwingungsenergie beträgt:

$$\begin{aligned}
 & - \left[\frac{K}{2} (\dot{m}_x^2 + \dot{m}_y^2 + \dot{m}_z^2) + \frac{L}{2} (\ddot{m}_x^2 + \ddot{m}_y^2 + \ddot{m}_z^2) \right]_t^{t+T} \\
 & = - \int_t^{t+T} (K \dot{m}_x \ddot{m}_x + \dots + L \ddot{m}_x \dddot{m}_x + \dots) dt
 \end{aligned}$$

und nach (7):

$$= \int_t^{t+T} M (\ddot{m}_x^2 + \dots) dt.$$

Andererseits ist nach (5) die in der Zeit einer Periode emittirte Energie:

$$\frac{2}{3} \int_t^{t+T} \frac{dt}{V^3} (\ddot{m}_x^2 + \dots),$$

oder durch partielle Integration:

$$- \frac{2}{3} \int_t^{t+T} \frac{dt}{V^3} (\dot{m}_x \ddot{m}_x + \dots),$$

oder, da nach (7) angenähert:

$$\begin{aligned}
 \ddot{m}_x &= - \frac{K}{L} \dot{m}_x. \\
 \frac{2}{3} \int_t^{t+T} \frac{dt}{V^3} \frac{K}{L} (\dot{m}_x^2 + \dots).
 \end{aligned}$$

Da nun die Dämpfung nur durch die Emission bedingt sein soll, so ist dies zugleich auch die verlorene Schwingungsenergie, und daher:

$$M = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{V^3} \cdot \frac{K}{L}.$$

Die Schwingungsgleichung lautet mithin:

$$K \dot{m}_x + L \ddot{m}_x + \frac{2K}{3V^3L} \dot{m}_x = 0, \dots$$

Die ausdrücklich eingeführte Voraussetzung, dass das Dämpfungsglied klein sein soll gegen jedes der beiden anderen Glieder, erfordert, dass

$$K \text{ klein gegen } V^3 L^3.$$

Wird endlich das Ion von aussen her zu Schwingungen angeregt, so kommt noch die Absorption von Energie hinzu, und damit vervollständigt sich die Schwingungsgleichung mit Rücksicht auf (6), wie leicht einzusehen, in folgender Weise:

$$K \ddot{m}_x + L \ddot{m}_x + \frac{2K}{3V^2L} \dot{m}_x = \mathfrak{F}_x, \dots$$

Diese Gleichung stellt also die Bewegung eines nahezu elliptisch schwingenden Ions vor, welches seine Energie durch Strahlung emittirt und zugleich aus auffallender Strahlung Energie absorbirt. Sie ist eine Verallgemeinerung einer früher von mir auf anderem Wege für eine geradlinige Schwingung abgeleiteten Gleichung.¹⁾

1) M. Planck, Wied. Ann. 60. p. 592. 1897.

(Eingegangen 20. Juli 1902.)

**7. Ueber die Verteilung
der Energie zwischen Aether und Materie;
von Max Planck.**

(Aus dem Jubelband für J. Bosscha, Arch. Néerl. p. 55. 1901,
mitgeteilt vom Verf.)

Vor kurzem habe ich aus der Theorie der elektromagnetischen Strahlung eine Beziehung abgeleitet, welche das absolute Gewicht eines ponderablen Molecüles, sowie auch die absolute elektrische Ladung eines Ions oder Elektrons mit derselben Genauigkeit zu berechnen gestattet, mit welcher die universellen Constanten der Wärmestrahlung eines schwarzen Körpers gemessen sind.¹⁾ Der physikalische Sinn dieser Beziehung besteht kurz gesagt in der Angabe eines allgemeinen Gesetzes, welches die Verteilung der Energie im stationären Zustand zwischen Aether und Materie regelt. Dass überhaupt in einem mit elektromagnetischer und mechanischer Energie ausgestatteten, nach aussen vollständig abgeschlossenen System im Laufe der Zeit eine ganz bestimmte Energieverteilung eintreten muss, folgt unmittelbar aus dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik, unabhängig von jeder speciellen Annahme über die Einzelheiten der Bewegungs- und der Strahlungsvorgänge. Wie man aber das Gesetz dieser stationären Energieverteilung wirklich finden kann, darüber möchte ich im Folgenden, im Anschluss an meine genannte Arbeit, einige nähere Ausführungen machen, wobei es im Interesse einer zusammenhängenden Darstellung gestattet sein möge, manches schon Bekannte zu wiederholen.

Eins der wichtigsten Mittel zum tieferen Eindringen in die Eigentümlichkeiten physikalischer und chemischer Vorgänge

1) M. Planck, Ann. d. Phys. 4. p. 564. 1901.

von der theoretischen Seite her beruht auf einer gewissen Erweiterung bez. Verallgemeinerung der Bedingungen, welche wir als charakteristisch für den Zustand eines materiellen Systems ansehen. Die der wirklichen Beobachtung und Messung zugänglichen Zustände repräsentiren nach dieser Auffassung nur ganz specielle, durch besondere Eigenschaften ausgezeichnete Fälle unter viel zahlreicheren und viel allgemeineren Zuständen, die in der Natur von vornherein ebensogut möglich sind, die sich aber der Beobachtung nicht, oder nicht so leicht, darbieten. Schon die reine Thermodynamik bietet Beispiele genug von solchen Zuständen, die man dort als „labil“ oder „theoretisch“ zu bezeichnen pflegt. Nehmen wir irgend ein chemisch vollkommen definirtes ruhendes Gas von gleichmässiger Dichte und Temperatur, so wird der Zustand in der Regel durch Masse, Volumen und Temperatur als bestimmt anzunehmen sein. Aber in manchen Fällen ist es vorteilhaft, den Begriff des Zustandes noch allgemeiner zu fassen. Wenn z. B. das Gas teilweise Dissociation erleidet, wie Stickstoffsuperoxyd N_2O_4 , welches sich in zwei Molecüle NO_2 spaltet, so ist der Zustand, soweit er sich der Messung darbietet, immer noch vollkommen bestimmt durch Masse, Volumen und Temperatur, aber dennoch betrachtet man in der Theorie ausser diesem Zustand, dem thermodynamischen Gleichgewichtszustand, noch ganz andere, viel allgemeinere Zustände, nämlich solche, welche bei gegebener Masse, Volumen und Temperatur des Gases noch einen ganz willkürlich gewählten Dissociationsgrad aufweisen, obwohl dieselben direct gar nicht zu beobachten sind. In jedem dieser theoretischen Zustände ist der Druck des Gases durch das Volumen, die Temperatur und den Dissociationsgrad nach dem Dalton'schen und dem Avogadro'schen Satze bestimmt, und der Gleichgewichtszustand, entsprechend einem bestimmten Dissociationsgrad und einem bestimmten Druck, geht aus ihnen erst durch eine weitere besondere Bedingung, nämlich durch die des Minimums der freien Energie hervor. Der Vorteil dieser Betrachtungsweise beruht darauf, dass man auf diesem Wege zu einem numerischen, mit der Erfahrung vergleichbaren Gesetz für die Abhängigkeit des Druckes und des Dissociationsgrades von der Dichte und der Temperatur gelangt.

Zu den beschriebenen rein theoretischen Zuständen gehören unter anderem auch diejenigen, welche entstehen, wenn man eine Lösung: fest, flüssig oder gasförmig, durch passende Erwärmung und Volumenvergrößerung ohne jede chemische Veränderung in den idealen Gaszustand übergehen lässt, welchen Process ich früher benutzt habe, um den vollständigen Ausdruck der Entropie und damit die thermodynamischen Eigenschaften einer verdünnten Lösung herzuleiten.¹⁾

Noch weiter in der bezeichneten Richtung geht die kinetische Theorie der Gase, auf die ich jetzt näher eingehen möchte, obwohl das Wesentliche der folgenden Bemerkungen durch die Forschungen von L. Boltzmann schon seit langer Zeit bekannt ist.²⁾ Der Zustand eines bestimmten aus einfachen Atomen bestehenden, in einem bestimmten Raum eingeschlossenen Gasquantums ist nach der kinetischen Theorie noch nicht bestimmt durch die gesamte ihm mitgeteilte kinetische Energie, sondern erst durch die vollständige Kenntnis der Raum- und der Geschwindigkeitsverteilung, d. h. durch die Angabe der Zahl der Atome, deren Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten je zwischen zwei bestimmten Grenzen liegen. Für den der Beobachtung zugänglichen stationären Zustand besteht allerdings nur eine ganz bestimmte Raumverteilung, nämlich die gleichmässige, und eine ganz bestimmte Geschwindigkeitsverteilung, nämlich die Maxwell'sche, aber im allgemeinen kann man das Verteilungsgesetz, sowohl in Bezug auf den Raum als auch in Bezug auf die Geschwindigkeit, gänzlich willkürlich annehmen, und erst wenn dieses Gesetz gegeben ist, darf man den Zustand des Gases als vollkommen bestimmt ansehen. Jedem solchen beliebig gegebenen Zustand entspricht eine bestimmte Entropie, und das Maximum der Entropie liefert nach dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik die Bedingungen des stationären Zustandes. Daher kommt für die Auffindung des letzteren alles darauf an, den allgemeinen Ausdruck der Entropie des Gases für irgend einen Zustand desselben zu kennen.

1) M. Planck, Wied. Ann. 32. p. 488. 1887.

2) L. Boltzmann, hauptsächlich Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wiss. zu Wien (II.) 76. p. 373. 1877.

Es giebt nun, wie Boltzmann gezeigt hat, einen einfachen Satz, der für jeden beliebig gegebenen Zustand des Gases, d. h. für jedes beliebig gegebene Gesetz der Raum- und der Geschwindigkeitsverteilung die Entropie zu berechnen gestattet, und der daher im Grunde als eine Erweiterung der Definition der Entropie über das Gebiet der reinen Thermodynamik hinaus in das der kinetischen Gastheorie anzusehen ist. Bedenkt man nämlich, dass von vornherein genommen jedes einzelne Atom des Gases jeden beliebigen Ort innerhalb des gegebenen Volumens einzunehmen und jede beliebige Geschwindigkeit nach jeder beliebigen Richtung zu besitzen vermag, so erhellt, dass ein bestimmtes, willkürlich vorgeschriebenes Verteilungsgesetz der Atome im allgemeinen auf ungeheuer verschiedene Weise zu stande kommen kann, je nachdem ein einzelnes ins Auge gefasstes Atom diesem oder jenem Raum- und Geschwindigkeitsintervall angehört. Man denke sich das ganze Raumgebiet (Volumen des Gases) und das ganze Geschwindigkeitsgebiet (für jede der drei Geschwindigkeitscomponenten das Intervall von $-\infty$ bis $+\infty$)¹⁾ in lauter gleiche kleine Teile zerlegt; dann bildet die Combination je eines Tripels der dreifach vielen Raumelemente mit je einem Tripel der dreifach vielen Geschwindigkeitselemente ein „Elementargebiet“ des Raumes und der Geschwindigkeit, und das gesamte Verteilungsgesetz, mithin der Zustand des Gases, ist charakterisirt durch die Angabe der Zahl der Atome, welche auf jedes der vorhandenen Elementargebiete entfallen. Nennt man eine specielle Verteilung, bei welcher jedem einzelnen Atome ein ganz bestimmtes Elementargebiet zugeordnet ist, eine „Complexion“, so umfasst der durch das vorgeschriebene Verteilungsgesetz bestimmte Zustand des Gases im allgemeinen eine sehr grosse, aber bestimmt angebbare Anzahl \mathfrak{P} von verschiedenen Complexionen. Die Entropie S des Gases in einem beliebig gegebenen Zustand ist nun nach dem Boltzmann'schen Satze bis auf eine willkürlich zu wählende additive Constante proportional dem natürlichen Logarithmus der

1) Streng genommen sind die Grenzen des Geschwindigkeitsgebietes nicht unendlich, sondern durch den vorgeschriebenen Wert der Energie des Gases beschränkt.

Zahl \mathfrak{P} der diesem Zustand entsprechenden verschiedenen Complexionen:

$$S = k \log \mathfrak{P} + \text{const.}$$

Die Proportionalitätsconstante k hängt von der Einheit ab, mit welcher man die Temperatur misst. Würde man die Temperatur eines Gases direct gleich der mittleren Energie eines Atoms setzen, so wäre $k = \frac{1}{2}$. Da aber die Einheit der Temperatur durch die conventionelle Festsetzung geregelt ist, dass der Abstand des Siedepunktes vom Gefrierpunkt für Wasser gleich 100, so ist die Constante k von der Dimension einer Energie dividirt durch eine Temperatur.

Um den angeführten Satz noch in etwas anderer Weise, als es Boltzmann gethan hat, zu illustriren, berechnen wir als Beispiel die Entropie eines Gases für einen fingirten Fall. Es seien zehn Atome vorhanden und sieben Elementargebiete des Raumes und der Geschwindigkeit. Das den Zustand des Gases bestimmende Verteilungsgesetz sei nun derart gegeben, dass von den zehn Atomen

1 Atom	im 1. Elementargebiet
2 Atome	„ 2. „
0 „	„ 3. „
0 „	„ 4. „
1 Atom	„ 5. „
4 Atome	„ 6. „
2 „	„ 7. „

liegen.

Dann ist zunächst die Zahl \mathfrak{P} der verschiedenen Complexionen zu berechnen, welche das gegebene Verteilungsgesetz liefern. Jede einzelne Complexion lässt sich offenbar in folgender Weise durch ein Ziffernbild versinnlichen. Wir bezeichnen die einzelnen Atome mit den Ziffern 1—10, und schreiben diese Ziffern der Reihe nach nebeneinander. Um nun eine bestimmte Complexion auszudrücken, setzen wir unter jede Atomziffer die Nummer desjenigen Elementargebietes, welchem das betreffende Atom bei dieser Complexion angehört, also z. B.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
6	1	7	5	6	2	2	6	6	7

Hier kommt die Nummer 1 einmal, die Nummer 2 zweimal, die Nummer 3 und 4 keinmal, die Nummer 5 einmal, die Nummer 6 viermal und die Nummer 7 zweimal vor, gerade wie es im Verteilungsgesetz vorgeschrieben ist. Jede Complexion besitzt, wie man sieht, ihr besonderes Ziffernbild, und die Anzahl aller möglichen verschiedenen Complexionen ist daher gleich der Anzahl aller möglichen verschiedenen Ziffernbilder, d. h. gleich der Zahl der Permutationen von zehn Elementen, unter denen vier von einer Art, zwei von einer anderen Art, und zwei von einer dritten Art einander gleich sind. Also:

$$\mathfrak{P} = \frac{10!}{1!2!0!0!1!4!2!} = 37\,800.$$

Daher ist die Entropie des Gases in dem gegebenen Zustand:

$$S = k \log 37\,800 + \text{const.}$$

Nach dem Schema dieser Berechnung lässt sich leicht der allgemeine Ausdruck für die Entropie eines aus N Atomen bestehenden Gases in einem beliebig gegebenen Zustand ableiten. Sei die Zahl der Atome, deren Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten zwischen den Werten:

$$x \text{ und } x + dx, \quad y \text{ und } y + dy, \quad z \text{ und } z + dz,$$

$$\xi \text{ „ } \xi + d\xi, \quad \eta \text{ „ } \eta + d\eta, \quad \zeta \text{ „ } \zeta + d\zeta$$

liegen, gegeben durch den Ausdruck:

$$f(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) dx dy dz d\xi d\eta d\zeta,$$

wobei

$$dx dy dz d\xi d\eta d\zeta = d\sigma$$

die Grösse eines Elementargebietes der Coordinaten und Geschwindigkeiten bezeichnet, so ist durch die Function f der Zustand des Gases bestimmt. Die Anzahl der möglichen verschiedenen Complexionen ist dann, wie oben:

$$\mathfrak{P} = \frac{N!}{H(f(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) d\sigma)!},$$

wobei das Zeichen Π das Product über alle Elementargebiete $d\sigma$ bedeutet. Die Entropie des Gases ergibt sich dabei, unter besonderer Berücksichtigung des Umstandes, dass in einem Elementargebiete sich immer noch viele Atome befinden und dass alle Elementargebiete gleich gross sind, zu:¹⁾

$$S = k \log \mathfrak{P} + \text{const.},$$

$$S = \text{const.} - k \int f \cdot \log f \cdot d\sigma.$$

Zur Prüfung der allgemeinen Zulässigkeit dieses Ausdruckes und zugleich zur Bestimmung der Constanten k dient die Berechnung von S für den stationären Zustand des Gases und Identificirung dieser Grösse mit der aus der Thermodynamik bekannten Clausius'schen Entropie.

Das Gesetz der stationären Raum- und Geschwindigkeitsverteilung wird durch diejenige Function f ausgedrückt, welche die Entropie S bei gegebener Atomzahl:

$$N = \int f d\sigma,$$

gegebenem Gesamtvolumen V , und gegebener Gesamtenergie:

$$U = \frac{m}{2} \int (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) f d\sigma$$

(m Masse eines Atomes) zu einem Maximum macht. Diese Bedingung ergibt nach den Regeln der Variationsrechnung:

$$f = \alpha \cdot e^{-\beta (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)},$$

wobei wegen der gegebenen Werte von N , V und U :

$$\alpha = \frac{N}{V} \cdot \left(\frac{3 m N}{4 \pi U} \right)^{3/2},$$

$$\beta = \frac{3 m N}{4 U},$$

und daraus folgt der Maximalwert von S :

$$S = \text{const.} + k N \left(\frac{3}{2} \log U + \log V \right).$$

1) L. Boltzmann, Vorlesungen über Gastheorie I. p. 42. 1896.

Nun ist andererseits die thermodynamisch definirte Entropie eines im Gleichgewichtszustand befindlichen, aus n g-Atomen bestehenden Gases vom Volumen V und der Temperatur ϑ :

$$S = \text{const.} + n(c_v \log \vartheta + R \log V).$$

R bedeutet die sogenannte absolute Gasconstante ($8,31 \cdot 10^7$ für $O = 16$), c_v die Wärmecapacität eines g-Atomes bei constantem Volumen im mechanischen Maasse. Da nun erstens ϑ proportional U , und zweitens bei einatomigen Gasen:

$$c_v : R = 3 : 2,$$

so findet absolute Uebereinstimmung zwischen beiden Formeln für S statt, wenn gesetzt wird:

$$n R = k N.$$

Bezeichnen wir also das von der Natur des Gases unabhängige Verhältniss der Masse eines Atomes zur Masse des g-Atomes mit ω , so ist:

$$\frac{n}{N} = \omega,$$

$$k = \omega R$$

und der allgemeine Ausdruck für die Entropie, in mechanischem Maasse, wird:

$$S = \omega R \log \mathfrak{P} + \text{const.}$$

Solange ω unbekannt ist, lassen sich die beiden Factoren ω und $\log \mathfrak{P}$ nicht einzeln berechnen, sondern nur ihr Product.

Eine besondere Anschaulichkeit gewinnt die Grösse der Entropie durch die Einführung des Begriffes der Wahrscheinlichkeit. Da nämlich die Zahl \mathfrak{P} aller möglichen verschiedenen Complexionen, welche einem bestimmten Zustand entsprechen, zugleich die Wahrscheinlichkeit dieses Zustandes angiebt, so kann man allgemein sagen, dass die Entropie des Gases in irgend einem Zustand ein Maass ist für die Wahrscheinlich-

keit dieses Zustandes, und dass der stationäre Zustand durch den grössten Wert der Wahrscheinlichkeit ausgezeichnet ist.

Gehen wir nun von der kinetischen Gastheorie zur Theorie der Wärmestrahlung über, die wir als einen elektromagnetischen Vorgang auffassen, so treffen wir in gewissem Sinn ganz ähnliche Verhältnisse an. Auch hier hat es sich für die Ableitung des stationären Strahlungszustandes von Vorteil erwiesen, zunächst von viel allgemeineren Zuständen auszugehen, die durch ganz beliebige Verteilungen der elektromagnetischen Energie charakterisirt sind, sowohl im freidurchstrahlten Felde (Vacuum) als auch in mitschwingenden, absorbirenden und emittirenden Resonatoren, deren Schwingungsenergie wir der Einfachheit halber auch mit zur elektromagnetischen Energie rechnen wollen. Jedem solchen durch eine willkürlich vorgeschriebene Energieverteilung definirten Zustand entspricht eine bestimmte Entropie, und das Maximum dieser Entropie ergiebt den Zustand der stationären, sogenannten normalen Energieverteilung, wie sie im Spectrum eines schwarzen Körpers auftritt. Der allgemeine Ausdruck der Entropie lässt sich durch ein dem oben geschilderten ganz ähnliches Wahrscheinlichkeitsverfahren finden. Wir betrachten im Folgenden nur die Verteilung der Energie auf einzelne, und zwar lineare Resonatoren von bestimmter Eigenperiode. Es seien N_1, N_2, N_3, \dots die Zahlen der im ganzen vorhandenen Resonatoren, je mit der Eigenperiode $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \dots$, und die Energieverteilung unter ihnen sei in der Art vorgeschrieben, dass auf jede einzelne Gattung, d. h. auf die Resonatoren je einer Eigenperiode, eine nach Willkür bestimmte Schwingungsenergie U_1, U_2, U_3, \dots entfällt. Dann entspricht der Verteilung der Energie U_1 auf die N_1 Resonatoren der ersten Gattung eine in ganz bestimmter Weise¹⁾ zu berechnende Anzahl von möglichen Complexionen \mathfrak{R}_1 , ebenso der Verteilung der Energie U_2 auf die N_2 Resonatoren der zweiten Gattung eine bestimmte Complexionszahl \mathfrak{R}_2 etc., sodass, da jede Com-

1) M. Planck, Verhandl. d. Deutsch. physik. Gesellsch. 2. p. 239. 1900 oder Ann. d. Phys. 4. p. 557. 1901.

plexion innerhalb einer Resonatorgattung mit jeder beliebigen anderen innerhalb einer anderen Gattung combinirt werden kann, die gesamte vorgeschriebene Energieverteilung auf

$$\mathfrak{N}_1 \cdot \mathfrak{N}_2 \cdot \mathfrak{N}_3 \dots = \mathfrak{N}$$

verschiedene Arten zu stande kommen kann.

Auch hier hat sich nun wieder der Satz als gültig erwiesen, dass in jedem Falle die Entropie des durch die vorgeschriebene Energieverteilung definirten Zustandes bis auf eine willkürliche additive Constante proportional ist dem natürlichen Logarithmus der dem Zustand entsprechenden Gesamtzahl von Complexionen:

$$S = k \log \mathfrak{N} + \text{const.},$$

wobei

$$k = 1,346 \cdot 10^{-16} \frac{\text{Erg}}{\text{Grad}}.$$

Daher giebt auch hier die Entropie durch ihre Grösse ein Maass für die Wahrscheinlichkeit irgend einer beliebig vorgenommenen Verteilung, und der Zustand der stationären Verteilung ist unter allen anderen durch die grösste Wahrscheinlichkeit ausgezeichnet.

Nachdem wir nun einerseits die Verteilung der mechanischen Energie zwischen bewegten Atomen, andererseits die Verteilung der elektromagnetischen Energie zwischen schwingenden Resonatoren erörtert haben, wenden wir uns nunmehr schliesslich zu der Frage nach der stationären Verteilung der Energie in einem System, welches sowohl mechanisch bewegte Atome, als auch elektromagnetisch schwingende Resonatoren enthält¹⁾, und kehren somit zurück zu dem im Titel dieser Abhandlung bezeichneten Problem der Energieverteilung zwischen Aether und Materie. Es fragt sich also, welcher Bruchteil der gesamten Energie eines nach aussen vollständig abgeschlossenen Systems in dem vom zweiten Hauptsatz der

1) Die Frage, ob die Resonatoren mit den Atomen identisch sind, kann hier ganz offen bleiben.

Wärmetheorie geforderten stationären Endzustand als mechanische Energie im Sinne der kinetischen Gastheorie, welcher Bruchteil als elektromagnetische Energie im Sinne der elektromagnetischen Strahlungstheorie auftritt.

Selbstverständlich können wir auch hier wieder zunächst von einer ganz beliebigen Verteilung ausgehen. Jedem Zustand, welcher durch eine willkürlich vorgeschriebene Raum- und Geschwindigkeitsverteilung zwischen den Atomen und Energieverteilung zwischen den Resonatoren bestimmt ist, wird eine ganz bestimmte Gesamtentropie entsprechen, und diese Gesamtentropie wird gegeben sein durch die Summe:

$$S = \omega R \log \mathfrak{P} + k \log \mathfrak{N} + \text{const.},$$

wobei der erste Summand die oben behandelte mechanische Entropie, der zweite die elektromagnetische Entropie vorstellt, welche Grössen beide nach Maassgabe der oben gemachten Auseinandersetzungen in ganz bestimmter Weise durch Zählung der entsprechenden Complexionen zu berechnen sind, da ja der Verteilungszustand als vollständig bekannt angenommen ist. Nach dem zweiten Hauptsatz der Wärmetheorie wird dann unter allen bei einer bestimmten Gesamtenergie des Systems überhaupt möglichen Zuständen der stationäre Zustand durch das Maximum von S ausgezeichnet sein.

Nun haben wir oben gesehen, dass die mechanische Entropie eines Gases in irgend einem Zustand ganz allgemein ein Maass der Wahrscheinlichkeit dieses Zustandes darstellt, ferner dass genau dasselbe gilt für die elektromagnetische Entropie eines Systems von Resonatoren. Da ist die Folgerung nicht abzuweisen, dass diese beiden an sich schon sehr allgemeinen, in zwei ganz verschiedenen Gebieten der Physik genau in gleicher Weise wiederkehrenden Beziehungen zwischen Entropie und Wahrscheinlichkeit einen gemeinsamen Ursprung haben, und dieser kann nur in folgendem vollständig allgemeinen Satze liegen:

Die Entropie eines Systems in irgend einem Zustand hängt nur ab von der Wahrscheinlichkeit dieses Zustandes.

Dann würde zugleich auch der zweite Hauptsatz der Thermodynamik, der Satz der Vermehrung der Entropie, welcher ja auch nicht bloss für ruhende und strahlende Wärme

einzelnen, sondern ebenso für die Wechselwirkungen beider Vorgänge gilt, in jedem Falle eine direct anschauliche Bedeutung bekommen, indem dann der thermodynamische Gleichgewichtszustand jedes Systems immer zugleich auch der wahrscheinlichste Zustand desselben ist. Nimmt man aber diesen Satz als richtig an — und ohne ihn dürfte meiner Meinung nach der Zusammenhang zwischen Entropie und Wahrscheinlichkeit überhaupt nicht aufrecht zu erhalten sein — so folgt, dass der Wert von S nur von dem Product der Complexionen $\mathfrak{P} \cdot \mathfrak{N}$ abhängen kann; denn da nach der elektromagnetischen Theorie der Strahlung die mechanischen und die elektromagnetischen Complexionen ganz unabhängig voneinander sind, so ist die Wahrscheinlichkeit des zusammengesetzten Zustandes gleich dem Product der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Zustände. Es muss also gelten:

$$\omega R = k.$$

Dann ist:

$$S = k \log (\mathfrak{P} \mathfrak{N}) + \text{const.}$$

und der aus der Wärmestrahlung berechnete, oben angegebene Wert von k gilt vollständig allgemein für die Definition der Entropie aus der Wahrscheinlichkeit, auch in der kinetischen Gastheorie. Die am Anfang aufgeworfene Frage nach der Verteilung der Energie zwischen Aether und Materie beantwortet sich dann dahin, dass diejenige Verteilung die stabile ist, welche die grösste Anzahl von Complexionen, mechanische und elektromagnetische zusammen genommen, zulässt. Die Verallgemeinerung dieses Resultates auf mehratomige Moleküle, sowie auf die Strahlung im freien Aether und auf complicirter gebaute Resonatoren dürfte keine principiellen Schwierigkeiten mehr bieten, wenn auch die praktische Durchführung zum Teil noch unthunlich sein wird.

Aus der letzten Gleichung folgt:

$$\omega = \frac{k}{R} = \frac{1,346 \cdot 10^{-16}}{8,31 \cdot 10^7} = 1,62 \cdot 10^{-24},$$

d. h. die Masse eines Atomes oder Moleküles ist das $1,62 \cdot 10^{-24}$ fache der Masse des g-Atomes oder g-Moleküles.

Das Elementarquantum der Elektrizität, d. h. die elektrische Ladung eines einwertigen Ions, ergibt sich hieraus, elektrostatisch gemessen, zu:

$$e = 1,62 \cdot 10^{-24} \cdot 9654 \cdot 3 \cdot 10^{10} = 4,69 \cdot 10^{-10}.$$

Jede Verbesserung des Wertes der Strahlungsconstanten k wird nach dieser Theorie immer zugleich auch eine verfeinerte Messung des absoluten Gewichtes der Atome und der absoluten Grösse des elektrischen Elementarquantums darstellen.

(Eingegangen 20. Juli 1902.)

8. Ueber die *Elektricitätsleitung in Flammen;* von *P. Lenard.*

1. Dass brennende Gase verhältnismässig gute Leiter der Elektricität sind, besonders wenn sie gewisse Metallsalze enthalten, ist bekannt, und man pflegt den Vorgang dieser Elektricitätsleitung gegenwärtig mit der Elektrolyse von Flüssigkeiten in Parallele zu stellen. Obgleich nun kaum zu bezweifeln sein wird, dass die Leitung auch in den Flammen in Wanderungen positiver und negativer Elektricitätsträger bestehe, so erscheint es doch fraglich, welcher Natur diese wandernden Träger hier seien.

Es soll im Vorliegenden eine Erscheinung beschrieben werden, welche elektrische Wanderungen in Flammen unmittelbar sichtbar macht und die, obgleich sie leicht herstellbar ist, doch bisher nicht beachtet worden zu sein scheint.¹⁾

2. Eine Bunsenflamme befinde sich zwischen zwei verticalen, einander parallelen und entgegengesetzt elektrisirten Metallplatten, also in einem horizontal verlaufenden elektrischen Felde. Bringt man dann, wie zum Zwecke der Spectralanalyse, eine Salzperle in die Flamme, so bemerkt man, dass der von der Perle aus sich bildende, kometenförmige, farbig leuchtende Dampfstreifen nicht, wie sonst, senkrecht nach oben, sondern schräg verläuft, und zwar ist er immer nach der negativen Platte hin geneigt. Die Salze der Alkalien und Erdalkalien zeigen die Erscheinung ausgeprägt, doch ist sie auch bei anderen Stoffen zu beobachten (6). Die Neigung des Dampfstreifens kann sehr gross werden, z. B. 45° übersteigen; in

1) Die Literatur des Gegenstandes dürfte vollständig berücksichtigt sein in G. Wiedemann, *Lehre von der Elektricität* 4. 1885; J. J. Thomson, *Recent Res. on Electricity and Magnetism* 1893; H. Kayser, *Handbuch der Spectroskopie* 2. 1902.

jedem Falle wird die Erscheinung bei abwechselndem Laden und Entladen der Elektrodenplatten sehr auffällig.

Steht die negative Platte in einiger Entfernung vom Flammensaum, so sieht man den farbig leuchtenden Dampf auch seitlich, aus der Flamme heraus, seinen Weg gegen diese Platte hin fortsetzen, wobei ihn ein Teil der Flamme selbst begleitet¹⁾, sodass diese einen seitlichen Fortsatz erhält, während sie im übrigen so ruhig und ungestört bleibt, wie ohne Einführung der Salzperle.

Eine Influenzmaschine genügt als Elektricitätsquelle, wenn die Platten nicht zu dicht an die Flamme gestellt sind, sodass sie nicht mehr als dunkelrot glühen; die Maschine muss dauernd im Gange gehalten werden und eine parallel zu den Platten geschaltete Funkenstrecke von etwa 1 mm Länge kann dazu dienen, übermässig hohe Ladungen, welche die Flamme unruhig machen würden, auszuschliessen. Besonders rein zeigt sich die Erscheinung bei Anwendung einer vielzelligen Accumulatorenbatte; es können dann die Platten, oder besser feine Netze aus Platin, auch in den Flammenmantel selbst gestellt werden. Eine Spannung von etwa 2000 Volt erweist sich im letzteren Falle als zweckmässig.

Eine Wasserstoffflamme, klein aus feiner Platinspitze oder auch gross aus einem Bunsenbrenner kommend, kann die Leuchtgasflamme mit gutem Erfolge ersetzen. Auch im Leuchtgas-Sauerstoffgebläse zeigt sich die Erscheinung, wenn auch hier, bei der grösseren Flammengeschwindigkeit, die Schiefe des Metaldampfstreifens viel geringer ausfällt, als in den anderen Flammen.

3. Die Erscheinung macht es leicht, die Wanderungen der leuchtenden, positiven Elektricitätsträger²⁾ in der Flamme zu verfolgen und alle Einflüsse auf die Geschwindigkeit dieser

1) Dies scheint anzudeuten, dass ausser dem leuchtenden Metaldampfe, zugleich mit demselben, auch noch andere positive Träger in der Flamme auftreten (vgl. 7, 8).

2) Ihrer Wanderung nach enthalten die leuchtenden Metallatome überschüssige positive Elektricität, was auch Mangel an negativer Elektricität sein kann; der von Hrn. Zeeman gefundenen Erscheinung nach enthalten sie auch schwingende negative Elektricität. Es ist jedoch nicht notwendig anzunehmen, und es soll auch nicht behauptet werden (vgl. 8, 9, 10), dass beides gleichzeitig stattfindet.

Wanderung schnell zu erkennen. Einige Beispiele mögen dies zeigen.

Führt man eine Kochsalzperle vorsichtig so weit an den Flammensaum heran, dass sie diesen eben zu färben beginnt, so leuchtet zwar der Natriumdampf, ohne jedoch in diesem Falle irgendwie merklich zu wandern; der Dampfstreifen steigt senkrecht auf. Erst wenn die Perle in das Innere des Flammenmantels geführt wird, kommen, oft ruckweise plötzlich, die oben beschriebenen Wanderungserscheinungen zu stande. Auch bei anderen Stoffen habe ich bemerkt, dass im äussersten Saum der Flamme die Wanderung fehlt, so bei Lithiumcarbonat, Kupferchlorid, Selen, Borsäure, welche alle, in den Mantel der Flamme eingeführt, Wanderung nach der negativen Seite hin ergeben. Stoffe, wie die Verbindungen der Erdalkalien, die überhaupt erst im Innern des Flammenmantels merklich verdampfen, zeigen jederzeit die Wanderung.

Aber auch in demselben Teil der Flamme zeigt nicht jeder Stoff unter allen Umständen die gleiche Wanderungsgeschwindigkeit; dieselbe kann vielmehr durch ganz geringe Mengen fremder Stoffe sehr verändert werden. Befindet sich eine Perle von Natriumsilicat im Mantel der Flamme, und beträgt die Schiefe des Dampfstreifens etwa 8° , so genügt das Heranführen eines kleinen Platinlöffelchens voll Salzsäure unterhalb der Perle an den Flammensaum, um sogleich jene Schiefe auf etwa 30° zu bringen. Man kann ebenso auch die Salzsäure einem der unteren Luftlöcher des Brenners nähern und sie abwechselnd von dort wieder entfernen, um grosse und geringe Wanderung in regelmässigem Wechsel zu erzeugen. Lässt man die Salzsäuremenge in der Flamme mehr und mehr zunehmen, so wird schliesslich der Natriumdampf entleuchtet; dabei bleibt die verstärkte Wanderung bis zum letzten Augenblicke der Sichtbarkeit des Dampfes fortbestehen. Kochsalz statt Natriumsilicat als Perle ergibt unmittelbar, ohne Zuhilfenahme der Salzsäure, die stärkere Wanderung.

Ganz die gleichen Erscheinungen der durch Salzsäuredämpfe verstärkten und bis zur Entleuchtung hin verstärkt bleibenden Wanderung habe ich auch bei Lithiumcarbonat und Lithiumsulfat gesehen, ebenso wie bei vorher schon länger geglühten, also chlorarmen Baryumchloridperlen. Frisches Chlor-

baryum giebt anfänglich viel stärkere Wanderung als nach einigem Glühen. Man kann also sagen, dass Chlorgehalt der Flamme durchweg verstärkte Wanderung der positiven Metallträger zur Folge hat.

Im Falle des Baryums ist die verstärkte Wanderung der Träger auch mit veränderter Lichtemission derselben verbunden; man weiss, dass Chlor zwei grüne Linien, Chloridlinien genannt, im Flammenspectrum des Baryums besonders hervortreten lässt.

4. Mit verstärkter Wanderung der positiven, metallhaltigen Träger ist auch verstärkte Leitfähigkeit der Flamme verbunden.¹⁾ Dies zeigt sich bei Messung der Spannungsdifferenz der beiden Flammenelektroden, wenn dieselben unter Einschaltung grosser Widerstände mit einer Accumulatorenatterie als Elektricitätsquelle verbunden sind. Diese Spannungsdifferenz bleibt merklich ungeändert, wenn nur der Saum der Flamme durch Natriumsilicat gefärbt wird, sie ist sehr vermindert, wenn die Silicatperle im Mantel glüht und sie ist noch viel mehr vermindert, wenn Salzsäure hinzukommt. Ganz dieselben Eigentümlichkeiten zeigt auch die Spannungsdifferenz von Drahtsonden (vgl. 7), welche man in den benutzten Teil der Flamme einführen kann.

5. Die Wanderungserscheinung tritt auch in der freien Flamme auf; es ist nicht nötig, dass feste Körper in ihr glühen oder dass die Salzperle im elektrischen Felde sich befinde. — Man prüft dies am besten, wenn man die beiden Elektrodenplatten weit ausserhalb der Flamme anbringt und den der negativen Platte zugewandten Flammensaum beobachtet, an welchem dann der oben (2) beschriebene Fortsatz sich zeigt. Ich habe Chlornatrium benutzt; die Perle wurde an der beobachteten Seite in den Flammenmantel eingeführt einmal im elektrischen Felde selbst, das andere Mal tiefer unten, im Innern eines auf den Brenner gesetzten Metallschornsteines; die Erscheinung war in beiden Fällen die gleiche. Sie fehlte auch dann nicht, wenn die Natriumflamme ohne Benutzung einer Platinöse erzeugt wurde, nämlich durch An-

1) Dieser Zusammenhang wäre nach späterem (8, 9, 10) als indirect dahin aufzufassen, dass sowohl die Elektricitätsleitung in der Flamme als auch die Ladung und also die Wanderung der oben genannten Träger Folgen der stattfindenden inneren Erschütterung dieser Träger sind.

näherung eines mit dem geschmolzenen Salz gefüllten Löffelchens an eines der unteren Luftlöcher des Brenners.¹⁾

6. Nicht nur die Dämpfe der Alkali-, Thallium- und Indiumsalze, sowie die der Erdalkaliverbindungen wandern nach der negativen Seite hin, sondern auch die Dämpfe der Borsäure, des Selens, Tellurs, Kupferchlorids.²⁾ Hieran reiht sich ferner die alte Erfahrung, dass die leuchtenden, kohlehaltigen Teile einer ohne genügende Luftzufuhr brennenden Leuchtgasflamme das Gleiche thun, ebenso wie man auch die reine, mattbläulich leuchtende Bunsenflamme oder Wasserstoffgasflamme selber, in allerdings sehr geringem Maasse, gegen die negative Platte hin sich neigen sieht.

Es wandern also eine grosse Zahl der verschiedensten leuchtenden Stoffe in Flammen nach der negativen Seite hin; niemals aber habe ich eine Wanderung von etwas Materiellem nach der positiven Seite hin beobachten können, und auch durch besondere Reagentien gelang es nicht, ein negatives elektrolytisches Ion in der Flamme nachzuweisen. Wurde z. B. neben eine Kochsalzperle, gegen die positive Platte zu, dicht ausserhalb des wandernden gelben Dampfstreifens ein reiner Kupferdraht in den Saum oder auch in den Mantel der Flamme gebracht, so trat an dem Drahte doch keine Spur der grünen oder blauen Kupferfärbung auf, welche ein höchst empfindliches Mittel ist, Chlor in der Flamme am Orte des Drahtes nachzuweisen. Auch dann erschien die Färbung am Kupferdraht nicht, wenn dieser selbst zur positiven Elektrode gemacht wurde.

Nach allen diesem muss es sehr zweifelhaft erscheinen, ob die Elektrizitätsleitung in Flammen mit Recht und in

1) Das Obige (5, 4) widerspricht Hrn. H. A. Wilson's Resultat, wonach die salzhaltigen Flammen erst durch Einführung der glühenden Elektroden ihr besonderes Leitungsvermögen erhalten sollen (Phil. Trans. A. 192. p. 513. 1899).

2) Dass Kupferverbindungen in Hrn. Arrhenius' Versuchen (Bihang till K. Svenska A. Handlingar (I) 16. p. 1. 1891) die Flamme nicht merklich leitend machten, dürfte mit der obigen Erfahrung deshalb in keinem Widerspruch stehen, weil geringe Mengen von Kupferverbindungen, mit der Luft der Flamme zugeführt, nur den äussersten Saum der Flamme färben, wie ich finde, woselbst aber die Wanderung fehlt (3, 4).

wahrem Sinne mit der Elektrolyse von Flüssigkeiten in Parallele zu stellen sei.

7. Eine Messung der Wanderungsgeschwindigkeiten der sichtbaren, positiven Träger, welche sonst nur auf Umwegen möglich war, ist direct ausführbar, sobald man die Geschwindigkeit des Aufsteigens der Flammengase kennt. Diese zu ermitteln, wurde der benutzte Brenner mit seiner Flamme auf der Centrifugalmaschine im Kreise herumbewegt, sodass die Flamme an der Stelle der halben Höhe ihres inneren Kegels eine Neigung von 45° zur Verticalen annahm. Die hierzu nötige Geschwindigkeit, welche 110 cm/sec betrug, ist gleich der gesuchten aufsteigenden Geschwindigkeit an derjenigen Stelle der Flamme, auf welche es ankommt. Das Product dieser Geschwindigkeit in die Tangente des Winkels, welchen der Dampfstreifen im elektrischen Felde mit der Verticalen bildet, ist die Wanderungsgeschwindigkeit im benutzten Felde.

Bei den Dämpfen einer Lithiumcarbonatperle war beispielsweise jener Winkel 10° ; zugleich ergaben zwei feine, verticale, im horizontalen Abstand von 1,0 cm als Sonden im Flammenmantel glühende Platindrähte eine Spannungsdifferenz von 250 Volt. Hieraus folgt die Wanderungsgeschwindigkeit der rot leuchtenden Lithiumträger

$$110 \cdot \operatorname{tg} 10^\circ / 250 = 0,08 \frac{\text{cm}}{\text{sec}} / \frac{\text{Volt}}{\text{cm}}.$$

Diese Geschwindigkeit ist fast 1000 mal kleiner als die auf anderem Wege von Hrn. Wilson für die positiven Träger einer Lithiumcarbonatflamme gefundene Geschwindigkeit, 63 cm/sec.¹⁾ Es ist indessen bei letzterem Resultate fraglich, ob es sich auf die leuchtenden Metallträger bezieht oder aber auf andere, mit den Metaldämpfen gleichzeitig in der Flamme auftretende, positive Träger, von deren Vorhandensein oben (2) Anzeichen erhalten wurden. Die zweifellose Verschiedenheit der beiden Geschwindigkeiten scheint ein weiteres Zeichen für die Bildung solcher positiven Träger zweiter Art zu sein.²⁾

1) H. A. Wilson, l. c. p. 516.

2) Die Bildung solcher Träger zweiter Art würde drittens angezeigt werden durch den Nachweis, dass Salzdämpfe den Elektricitätstransport in einer Flamme mehr vergrößern können als der Valenzanzahl der ein-

Die übrigen von mir beobachteten Perlensubstanzen ordnen sich nach zunehmender Neigung ihrer Dampfstreifen im Flammennmantel (vgl. 3) etwa wie folgt:

- | | |
|------------------------------------|--------------------------|
| 1. Borsäure, | 7. Chlorealcium, frisch, |
| 2. Lithiumcarbonat, | 8. Kupferchlorid, |
| 3. Natriumsilicat, | 9. Thalliumchlorid, |
| 4. Chlorstrontium, vorher geglüht, | 10. Kaliumchlorid, |
| 5. Chlorbaryum, desgl., | 11. Rubidiumchlorid. |
| 6. Chlornatrium, | |

8. Benutzt man die für die Wanderung elektrisch geladener Atome oder Molecüle geltende Beziehung¹⁾

$$\omega_b = \frac{3}{2\pi\sqrt{2}} \cdot \frac{eF}{Ds^2W},$$

worin bedeutet ω_b die beobachtbare Wanderungsgeschwindigkeit, e die Ladung der Träger, F die Feldstärke, D die Dichte des Mediums, W dessen moleculare Geschwindigkeit²⁾, s die Radiensumme von Träger und Gasmolecül, so erhält man mit der oben (7) bei Lithiumcarbonat gefundenen Geschwindigkeit, $\omega_b = 0,08$ cm/sec, für die genannte Radiensumme den Wert

$$s = 6,7 \cdot 10^{-6} \text{ mm.}$$

Dies ist etwa 10 mal grösser als für Atome oder Molecüle als Träger zu erwarten gewesen wäre.³⁾ Treffen die in der Rechnung vorausgesetzten Bedingungen zu, so wäre danach zu schliessen, dass die rot leuchtenden Lithiumdämpfe aus Aggregaten sehr vieler Atome oder Molecüle bestünden. Dies scheint mit der Beschaffenheit des Spectrums dieser Dämpfe sowohl, wie mit der Höhe der Temperatur der Flamme kaum vereinbar zu sein. Die hier auftretende Schwierigkeit verschwindet,

geführten Salzmenge entspricht. Dieser Nachweis scheint mir aber in dem von Hrn. Arrhenius (l. c.) gegebenen reichen Beobachtungsmaterial schon enthalten zu sein.

1) P. Lenard, Ann. d. Phys. 3. p. 313. 1900.

2) Als Medium ist hier Stickstoff von 2000° C. Temperatur angenommen. Nach der Zusammensetzung des Leuchtgasen und der der atmosphärischen Luft ist jenes Gas der weitaus überwiegende Bestandteil der Bunsenflamme; doch würden andere mit Erfahrung vereinbare Annahmen über das Medium, soweit ich sehe, an den oben zu ziehenden Schlüssen nichts ändern.

3) Vgl. O. E. Meyer, Gastheorie, II. Teil. 1899.

indem wahrscheinlich wird (9, 10), dass die Metallatome der Dämpfe in der Flamme nicht, wie in der Rechnung vorausgesetzt, dauernd mit einem Elementarquantum positiver Elektrizität geladen sind, sondern dass sie fortdauernd negative Quanten ausstossen und dafür solche aus der Umgebung wieder aufnehmen, sodass im Mittel über die ganze Zeit ihrer Wanderung nur ein geringer Ueberschuss positiver Elektrizität in diesen Trägern vorhanden ist.¹⁾

9. Neben den positiven Trägern müssen in den ursprünglich unelektrischen, verbrennenden Gasen auch negative Träger entstehen; es ist schon oben (6) bemerkt worden, dass dieselben unsichtbar sind. Aus dem seit lange bekannten unipolaren Verhalten der Flammen war schon zu schliessen, dass diese Träger viel beweglicher seien als die positiven; ihre Wanderungsgeschwindigkeit beträgt nach kürzlich von Hrn. G. Moreau veröffentlichten Messungen, welche mit den von Hrn. Wilson früher gefundenen Näherungswerten in gutem Einklang sind, etwa

$$1200 \frac{\text{cm}}{\text{sec}} / \frac{\text{Volt}}{\text{cm}}^{\frac{1}{2}},$$

und zwar wurde dieselbe Geschwindigkeit für eine Anzahl verschiedener Kalium- und Natriumsalze gefunden.²⁾

Diese sehr grosse Geschwindigkeit wäre mit der oben (8) benutzten Gleichung, welche für Atome oder Moleküle als Träger gilt, nur vereinbar durch die Annahme, dass jeder dieser Träger mit sehr vielen Elementarquanten negativer Elektrizität beladen sei.⁴⁾ Näher liegend nach heutiger Kenntniss und mit allem Vorhergehenden verträglich ist die andere Annahme, dass die unsichtbaren negativen Träger nicht materieller

1) Diejenigen anderen Atome oder Moleküle der Flamme, von welchen die Metallatome neue negative Quanten bezogen haben, wären als die positiven Träger zweiter Art anzusehen, deren Existenz in dreifacher Weise angezeigt erschien (2, 7).

2) G. Moreau, *Compt. rend.* 134. p. 1575. 1902.

3) Durch Hrn. Arrhenius' Untersuchungen (l. c.) war es bereits sehr wahrscheinlich geworden, dass die negativen Träger aller salzhaltigen Flammen identisch seien.

4) Es ergibt sich mit $\omega_0 = 1200 \text{ cm/sec}$ und $e = 1 \text{ El.-Qu.}$ die Radiensumme $s = 0,05 \cdot 10^{-6} \text{ mm}$, was von kleinerer Grössenordnung ist, als die Durchmesser materieller Atome oder Moleküle.

Natur, sondern etwa identisch mit den Quanten der Kathodenstrahlen seien.

Als Emissionscentren dieser freien Quanten würden in salzhaltigen Flammen die Metallatome aufzufassen sein, denn von deren Zahl und Natur hängt nach den von Hrn. Arrhenius (l. c.) gefundenen Gesetzmässigkeiten allein das besondere Leitvermögen dieser Flammen ab.

10. Man würde danach die gegenwärtige Kenntnis über den behandelten Gegenstand durch die Vorstellung zusammenfassen können, dass die in Flammen in innerer Erschütterung befindlichen Atome des Kohlenstoffs (6), und noch viel mehr die eingeführter Metalle, Kathodenstrahlen emittieren, oder, in anderer Ausdrucksweise, radioactiv sind. Dass innere Erschütterung solche Emission in den genannten Stoffen wirklich auslösen kann, habe ich früher im Falle des ultravioletten Lichtes gezeigt.¹⁾

Kiel, Mitte August 1902.

1) P. Lenard, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien 108. p. 1649. 1899; Ann. d. Phys. 8. p. 149. 1902.

(Eingegangen 18. August 1902.)

9. Die Condensatormaschine.

*Eine neue Anordnung zur Erregung von Influenz-
elektricität;
von H. Wommelsdorf.*

Sobald es sich darum handelt, ohne Rücksicht auf die Elektricitätsmengen immense Potentialdifferenzen zu erlangen, ist keine Maschine oder Umsetzungsapparat dafür geeigneter als die Influenzmaschine. Sie übertrifft darin die Funkeninductorien durch die Sicherheit, bei Ueberanstrengungen gegen Durchschlagen der kostbaren secundären Wicklung derselben gesichert zu sein, ferner durch ihre leichte Transportfähigkeit und nicht zum mindesten durch den billigen Preis sowohl der Maschine selbst, wie auch der elektrischen Energie, die in ihr erzeugt wird.

Diese Vorzüge der Influenzmaschine genügten bereits, um sie selbst dort zu verwenden, wo die Funkeninductorien vermöge ihrer grösseren Quantitäten von Elektricität besser am Platze wären wie zum Beispiel zur Erzeugung von X-Strahlen in Feldzügen auf dem Schlachtfelde etc. Das erlangte Licht ist jedoch entweder zu schwach, um in stärkeren Schichten Gegenstände dem Auge wahrnehmbar zu machen, oder es besteht, falls man mittels Leidener Flaschen gewisse Elektricitätsmengen bis zum jedesmaligen Funkenausgleich sich ansammeln lässt, aus in kurzen Zeitintervallen einander folgenden aufleuchtenden Lichterscheinungen, die trotz ihrer Helligkeit nur zur Not obigem Zweck dienen können.

Die Ursache hiervon wie überhaupt der einzige Nachteil gegenüber den Inductorien besteht darin, dass es nicht oder sehr schwer möglich ist, bei gleichbleibender Schlagweite die in einer gewissen Zeit erzeugte Elektricitätsmenge zu vergrössern. Ist dieser Uebelstand beseitigt, so fällt damit, wie wir an ausgeführten grossen, aus vielen Scheiben bestehenden Influenzmaschinen sehen, gleichzeitig der zweite grosse Fehler

dieser Maschinen fort, nämlich die Abhängigkeit von den Witterungsverhältnissen, die bei einfachen Influenzmaschinen bis zum vollständigen Versagen führen kann.

Die bisherigen Versuche, durch Verdoppelungen bez. Vielfältigung der einfachen Influenzmaschinen-Anordnung ein besseres Resultat zu erzielen, sind wiederholt an den verschiedensten Systemen gemacht, aber ebenso oft aufgegeben worden. Eine solche Maschine aus vielen rotirenden Scheiben von Toepler, wie sie im physikalischen Institut der Universität Heidelberg zur Demonstration großer elektrostatischer Versuche benutzt wird, stellt Fig. 1 schematisch dar.

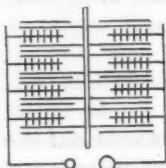


Fig. 1.

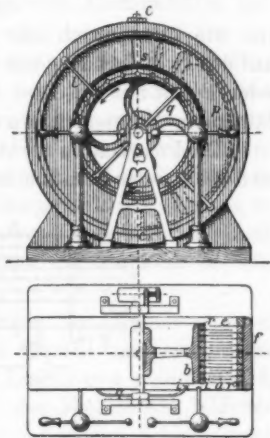
Zwischen je zwei beweglichen Scheiben, von denen nicht alle, nur acht, gezeichnet sind, befinden sich jedesmal je zwei Saugkämme, ferner, in der Zeichnung nicht sichtbar, je ein Querconductor und je zwei Bürsten zur Erregung der Papierbelege auf den feststehenden Scheiben. Alle diese schwer zugänglichen Teile verlangen eine äusserst solide, gegen Stösse gesicherte Befestigung. Da nun der Abstand zweier beweglicher Scheiben möglichst klein sein muss, um die ihnen allen gemeinsame Welle nicht über ein praktisches vor Erzitterungen sicherndes Maass hinaus zu verlängern, ist es praktisch nicht möglich, eine starre Verbindung dieser Teile innerhalb der rotirenden Scheiben herzustellen. Man behilft sich daher damit, dieselben ausserhalb anzuordnen, was zur Folge hat, dass die bereits unverhältnismässig breite Maschine auch noch eine unverhältnismässig grosse Länge und Höhe erhält, ohne dass sie dadurch infolge der vielen unzulänglichen Glasverbindungen an Unempfindlichkeit für die Behandlung und den Transport gewonnen hätte. Die Maschine in dieser Form bleibt ein Apparat, der allerdings ausnahmsweise im Laboratorium für besonders grosse Versuche vorteilhaft Verwendung finden kann.

Aus diesen Erwägungen habe ich bei dem Versuche, Influenzmaschinen von grosser Elektrizitätsmenge herzustellen, die alte Form vollständig aufgegeben und bin dabei zu einer Anordnung gelangt, die nicht nur alle technischen Mängel

hinsichtlich der Festigkeit beseitigt, sondern auch gleichzeitig eine theoretische Verbesserung, eine Vermehrung der Elektrizitätsmenge, mit sich bringt und zwar dadurch, dass hierbei jede rotirende Scheibe von der wirksamen Fläche F unmittelbar zwischen zwei feste, im Abstände $2d$ voneinander angeordnete Scheiben gestellt ist, und dadurch die Capacität jeder einzelnen von $F/4\pi d$ um das Doppelte erhöht wird. Die Uebereinstimmung dieser Verhältnisse mit denen eines Condensators (vgl. auch Fig. 3) haben mich veranlasst, der vorliegenden Maschine den Namen Condensatormaschine zu geben.

Eine solche Condensatormaschine (D.R.P. a.) mit zehn Erreger- und neun Ankerscheiben, wie ich fernerhin die feststehenden und beweglichen Scheiben benennen werde, zeigt Fig. 2 in der Seitenansicht, Fig. 3 im Grundriss, Schnitt und Aufsicht.

Auf den nach Art einer Riemenscheibe ausgebildeten cylindrischen Körper aus Ebonit b sind die Ankerscheiben a von der Dicke δ geschoben und durch die Ebonitringe r von der Dicke $2d - \delta$ in dem Abstände $2d$ voneinander befestigt. In gleicher Weise werden die Erregerscheiben e von der Dicke δ' in den cylindrischen Körper f geschoben und ebenfalls durch Ebonitringe r' von der Dicke $2d - \delta'$ in dem Abstände $2d$ voneinander gehalten.



Figg. 2. u. 3.

Beide Teile, Anker und Erreger, werden so zu einander angeordnet, dass concentrisch und abwechselnd je eine Anker- und Erregerscheibe nebeneinander zu liegen kommen. Bei kleineren Maschinen erreicht man dies dadurch, dass Anker und Erreger gleichzeitig von einer Seite her zusammen gebaut werden, bei grösseren auf die Weise, dass der Erreger aus zwei gleichen getrennten Hälften hergestellt wird, die in der Zeichnung von links und rechts bei cc_1 über den fertig montirten Anker zusammen geschoben und befestigt werden.

Jede Ankerscheibe (vgl. Fig. 4) besteht aus zwei gleichen aufeinander gelegten cartondicken Ebonitscheiben g von der Dicke $\leq \delta/2$; zwischen dieselben ist eine grosse Anzahl schmalen Sektoren s aus dünnem Metallblech angebracht, von denen jeder vermittelst der schmalen radialen Verlängerung v mit einem Draht w in Verbindung steht, der parallel zur Axenrichtung auf der Cylinderfläche der Trommel b hinlaufend in einen runden, wohlgeglätteten Metallknopf k endigt.

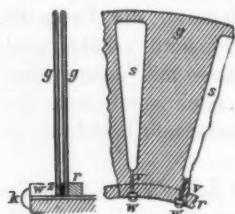


Fig. 4.

In ähnlicher Weise werden die Erregerscheiben aus je zwei dünnen Ebonitscheiben gebildet, zwischen denen die Papierbelege p angebracht sind, die wie oben durch eine metallische Verlängerung und einen auf der Cylinderfläche des Körpers f hinlaufenden Metallstreifen oder Draht mit den zwei in die Bürsten aus Metalllitze i auslaufenden Bürstenträgern l in leitender Verbindung stehen.

Die Polarisation der Ankerscheiben wird durch die Knöpfe k und die bei der Rotation des Ankers sie bestreichenden Bürsten i

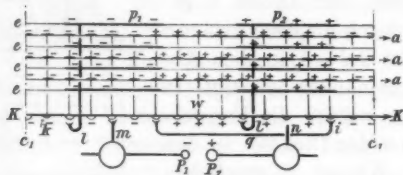


Fig. 5.



Fig. 6.

des Querconductors q bewirkt, wie aus dem Diagramm (Fig. 5) hervorgeht, das man sich als eine Abwicklung der bei c_1 auseinander geschnittenen Anker- und Erregerscheiben zu denken hat.

In derselben bedeuten die a -Reihen die Anker-, die e -Reihen die Erregerscheiben und die Reihe $\overline{K K}$ den aus den oben beschriebenen Metallknöpfen k bestehenden Collector. Die von den Belegen p_1 und p_2 der Erregerscheiben abgestossenen

gleichnamigen Elektricitäten in den Ankerscheiben werden vermittelt der Sektoren s , der Verbindungen w , der Collectorknöpfe k und der Bürsten m und n in die als Elektroden dienenden Metallkugeln P_1 und P_2 getrieben, zwischen denen sich bei rascher Rotation des Ankers durch einen ununterbrochenen kräftigen Funkenstrom von gleichzeitig grosser Schlagweite ihre Potentiale ausgleichen können.

Wie wir sehen, haben die Sektoren der Ankerscheiben bei der Condensatormaschine eine ganz besonders grosse Bedeutung. Während sie in den heutigen Influenzmaschinen lediglich dem Zweck dienen, die Selbsterregung der Maschinen sowie ihre Unabhängigkeit gegen atmosphärische Einflüsse zu fördern, übernehmen sie in der Condensatormaschine gleichzeitig das Amt der Saugkämme, die freien Elektricitäten auf der Oberfläche des Dielektricum's zu- bez. abzuleiten.

Um diesem Umstande grösstmögliche Rechnung zu tragen, empfiehlt es sich, die Sektoren nicht, wie es bei den heutigen Influenzmaschinen üblich ist, aus Stanniol herzustellen, sondern dazu ein etwas dickeres Metallblech h (Fig. 6) zu verwenden, dessen Kanten rings herum scharf zugespitzt sind, so wie dieses in der Fig. 6 links in natürlicher Grösse dargestellt ist; oder wie in der Figur rechts die Sektoren aus zwei Papierschichten und einer etwas grösseren Zwischenschicht aus dünnem Metall, Stanniol etc. zusammen zu stellen.

Diese Anordnungen bringen ausser der Erzielung einer besseren Saugwirkung den weiteren Vorteil mit sich, dass zwischen den Scheiben ein schmaler Luftraum o gebildet wird, in dem der sich durch Ausströmen der Elektricität bildende Ozon durch die Centrifugalkraft der rotirenden Scheibe nach aussen getrieben und durch eine Oeffnung in den Ringen und dem Körper f , in Fig. 2 bei c , abgeleitet wird. Gleichzeitig entsteht in dem bezeichneten Luftraum eine geringe Luftverdünnung von ca. 5—20 mm Wassersäule, die ebenfalls das Aus- bez. Einströmen der Influenzelektricität aus den Kanten befördert, ohne dass sie ein Ausstrahlen der freien Elektricität in die umgebende Luft wegen der ringsum geschlossenen Form der Maschine ermöglichen könnte und zwar im Gegensatz zu den Influenzmaschinen, die man vorteilhaft unter hohem Druck hat arbeiten lassen.

Eine Modification ist es, die Kanten der Sektoren mit spitzen Zähnen zu versehen; doch wird dadurch nichts verbessert, da man bereits mit den vorher beschriebenen Sektoren alles erreichen kann, was dem Zwecke dienlich wäre. Es genügt bereits vollkommen, unter Beibehaltung der Stanniol-sektoren zwischen die zwei Scheiben *g*, in Fig. 4 bei *z*, einen ca. $\frac{1}{2}$ mm dünnen Ebonitring zu bringen und sie so durch einen schmalen Luftraum zu trennen, worin dann ebenfalls die gewünschte Ventilation stattfinden kann.

Ein besseres Resultat erreicht man unter Umständen mit Sektoren, die, wie Fig. 7 angiebt, aus dem dicken, zugleich die Verlängerung *v* bildenden Metallstreifen *t* und den spitzen dünneren tangentialen Kämmeu *u* zusammengelötet oder auch aus einem Stück gestanzt sind. Betrachtet man die Entladung eines solchen Sectors in einem dunklen Raum, so sieht man, wie die Elektrizität büschelförmig über die Oberfläche der Ebonitscheibe hin in den Sector gleitet, so wie es in Fig. 7 durch die feinen Linien angedeutet ist.

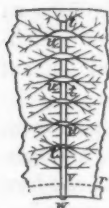


Fig. 7.

Der Vorteil dieser kammförmigen Sektoren liegt nicht etwa in der weiteren Vermehrung der Spitzen und Kanten — was, wie bereits erwähnt, zwecklos ist — als vielmehr in der geringen Oberfläche. Nach Versuchen von M. Wimschurst¹⁾ nimmt die gelieferte Elektrizitätsmenge mit der Vergrößerung der Oberfläche der Sektoren und ihrer Zahl ab. Da dies jedoch bei seiner Versuchsmaschine wie bei allen Influenzmaschinen jedenfalls durch Ausströmen aus den scharfen Sectorkanten in die freie Luft eintritt, was bei der vorliegenden Anordnung unmöglich gemacht ist, so ist aus seinen Versuchen nicht ohne weiteres zu schliessen, dass sie bei nicht zu grosser Zahl und Grösse der Sektoren auch für die Condensatormaschine ihre Gültigkeit behalten. Wäre es aus anderen Gründen doch der Fall, so wären die nach Fig. 7 ausgebildeten Sektoren den durch Fig. 4 und 6 gekennzeichneten vorzuziehen; oder falls man die letzteren ihrer Einfachheit halber beibehalten will, ergeben sich daraus die Regeln:

1) Vgl. John Gray, *Les machines électriques à influence*, traduit par G. Pellissier, p. 208. Paris, Gauthier-Villars et fils 1892.

1. Die Zahl der Sektoren wird, um ihren Abstand voneinander gering zu halten, nicht zu klein, möglichst nicht unter 30 gewählt.

2. Dafür wird die Oberfläche der einzelnen Sektoren entsprechend kleiner gehalten, indem man sie genügend schmal ausführt.

Es bleibt mir noch zu erwähnen übrig, dass die Condensatoranordnung auch so praktisch ausführbar ist, dass die Erregerscheiben eine Drehbewegung in entgegengesetzter Richtung ausführen nach Art der Influenzmaschinen von Wimshurst und Holtz, Modell zweiter Art; ferner dass an die Stelle der Scheiben Cylinder treten, die wiederum entweder theils fest, theils beweglich sind oder in entgegengesetzter Richtung

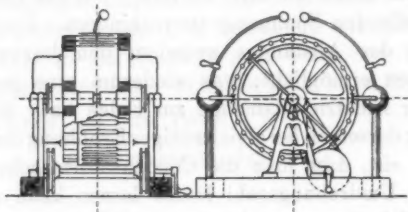


Fig. 8.

rotiren, wodurch es möglich ist, die Maschinen für eine bestimmte Schlagweite in einen sehr kleinen Raum zusammen zu drängen.

Ein Modell der Art, wie ich es bereits im April vorigen Jahres ausgeführt habe, zeigt Fig. 8. Es leidet an dem Uebelstand, dass die concentrische Montirung der Cylinder mit der Vermehrung ihrer Zahl und Grösse sehr schwierig und nicht über die in der Zeichnung angewendete Zahl hinaus genau auszuführen ist. Die Polarisation der Maschine vollzieht sich in der Weise, dass in den Cylinderflächen, die oben und unten zwischen den Querconductoren liegen, ungleichnamige Elektricitäten, und in denen, die sich seitlich davon befinden, gleichnamige Elektricitäten erzeugt werden, die in die Elektroden getrieben, sich durch einen Funkenstrom ausgleichen können. Alles weitere in betreff dieser und der anderen oben kurz erwähnten Ausführungsarten übergehe ich, da es sich theils

von selbst ergibt, theils wegen der Ueberlegenheit des in Figg. 2 und 3 abgebildeten Modelles als zwecklos erscheint.

Vergleichen wir nun nochmals die durch Figg. 2 und 3 dargestellte Condensatormaschine mit der durch Fig. 1 schematisch gezeichneten alten Influenzmaschinenanordnung von Toepler, so kommen wir zu folgendem Resultat:

Zunächst wird durch die Erregung einer Ankerscheibe von je zwei Seiten aus die Elektrizitätsmenge bei der Condensatormaschine bei gleicher Umdrehungsgeschwindigkeit gegenüber den alten Maschinen verdoppelt. Da ferner die Ebonitscheiben von dem Cylinder b bez. f und den Ringen r , r' gehalten und versteift werden, können sie dünner gehalten werden, als bei den Influenzmaschinen erforderlich ist, und brauchen demnach nicht dicker zu sein als nötig, um das Durchsprühen bei der betreffenden Spannung zu verhindern. Damit ist eine Verringerung des Abstandes zwischen den beweglichen und festen Scheiben ermöglicht, was wiederum eine proportionale Erhöhung der Elektrizitätsmenge zur Folge hat. Eine weitere Verdoppelung derselben bei gleichzeitiger Erhöhung des Potentials tritt dadurch ein, dass man die Condensatormaschine mit der ca. doppelten Umdrehungszahl laufen lassen kann als wie die aus vielen Scheiben bestehenden gleich grossen Influenzmaschinen. Diese besitzen nämlich „aufgeklebte“ mit Knöpfen versehene Sektoren, die unter dem Einflusse der Centrifugalkraft und der sie bestreichenden Bürsten sehr leicht losgelöst werden, ein Uebel, das durch die getrennten, allen Sektoren gemeinsamen Collectorknöpfe der Condensatormaschine beseitigt ist. Ferner wird ebenfalls durch den getrennt angeordneten Collector die Zahl der Saugkammpaare, der Querconductoren und der Bürsten zur Erregung der Papierbelege, die bei 18 rotirenden Scheiben je 9 beträgt, auf je eins vermindert.

Endlich ist noch zu erwähnen, dass der Nachtheil der Influenzmaschinen, allmählich durch Bedecken ihrer Oberflächen mit Staub unwirksam zu werden — weshalb man sie vielfach vollständig in einen Glaskasten eingeschlossen hat —, bei der Condensatormaschine durch die rings geschlossene Form vollständig beseitigt ist. Aus demselben Grunde fallen bei ihr auch die durch Ausstrahlung in die umgebende Luft hervorgerufenen sehr beträchtlichen Verluste der alten Maschine fort.

Es hat sich ergeben, dass ein kleines Modell von 24 cm Ankerscheibendurchmesser, einer Gesamthöhe von 30 cm, einer Länge von 28 cm und einer Breite von 22 cm bereits eine grössere Elektrizitätsmenge liefert, als die grössten Influenzmaschinen, sodass sie vermöge ihrer geringen Grösse, ihrer Festigkeit und ihres kräftigen Funkenstromes, der dem der Inductorien gleichkommt, in hohem Grade geeignet ist, zu Versuchen mit X-Strahlen wie überhaupt zu Versuchen mit hohen Spannungen verwendet zu werden.

Möge die Condensatormaschine, mit diesen Vorzügen ausgestattet, noch mehr dazu anregen, ein Isolationsmaterial ausfindig zu machen, das weniger druckempfindlich wie Glas und widerstandsfähiger gegen Ozon als Ebonit — vielleicht durch zweckmässiges Behandeln der Oberfläche — ist, ebenso wie sie dazu dienen möge, den Versuchen mit hochgespannter Elektrizität, die in der Neuzeit ganz besonders an Interesse gewonnen haben, ein neues weiteres Feld zu eröffnen.

Heidelberg, im Juli 1902.

(Eingegangen 24. Juli 1902.)

10. Ueber die Natur der positiven Elektronen; von W. Wien.

Bei meinen letzten Untersuchungen¹⁾ über die elektrische Entladung in verdünnten Gasen hatten verschiedene Beobachtungen Schlüsse über die Natur der positiv geladenen Canalstrahlen zu ziehen erlaubt, die einen wesentlichen Unterschied nicht nur in quantitativer Beziehung gegenüber den negativ geladenen Kathodenstrahlen hervortreten liessen. Da für die letzteren die Bezeichnung Elektronen in Aufnahme gekommen ist, die jedenfalls bezeichnender ist, als der von einer speciellen Erzeugungsweise hergeleitete Name Kathodenstrahlen, so werde ich die positiv geladenen Teilchen, die nicht als geladene chemische Atome auftreten, *positive Elektronen* nennen. Ferner werde ich für das in der Elektronentheorie so wichtige Verhältnis von Ladung zu Masse die abgekürzte Bezeichnung *specifische Ladung* gebrauchen.

Die von den positiven Elektronen hervorgérufene Fluorescenz hatte sich als abhängig von der Natur des Gases erwiesen. Die gleichzeitige Beobachtung der Elektrodenspannung und der elektrostatischen Ablenkung hatte ergeben, dass eine continuirliche Reihe von Elektronen vorhanden war, deren Ablenkbarkeit bis zum Werte Null sank. Dies führte zu der Folgerung, dass die spezifische Ladung während der Bewegung verkleinert wird, und zwar in verschiedenem Grade, sodass nur die am meisten abgelenkten keine Veränderung der specifischen Ladung erfahren haben.

Dieser Schluss wurde durch die gleichzeitige magnetische und elektrostatische Ablenkung bestätigt, die ergab, dass die spezifische Ladung continuirlich veränderliche Werte bis zu einem Maximalwert besitzt, die der Grössenordnung nach über-

1) W. Wien, Ann. d. Phys. 8. p. 244. 1902.

einstimmt mit der spezifischen Ladung 10000, wie sie sich aus der Elektrolyse für das Wasserstoffion ergibt.

Merkwürdigerweise ergab sich diese Zahl aber nicht nur bei Wasserstoff-, sondern auch bei Sauerstofffüllung.

Nun liegt die Vermutung nahe, dass auch bei der Sauerstofffüllung immer noch Wasserstoffreste sich befunden haben mögen, welche die am meisten abgelenkten Strahlen bilden konnten. Es ist dies um so eher möglich, als die Wasserstoffionen bei gleicher Spannung viermal so grosse Geschwindigkeit erhalten müssen als Sauerstoffionen und daher weniger absorbierbar sein werden.

Es war daher zu versuchen, ob es nicht gelingt, durch Entfernen des Wasserstoffs die Elektronen mit grosser spezifischer Ladung zu beseitigen. Dass bei der Erzeugung von Sauerstoff durch Erhitzen von Kaliumpermanganat Wasserstoff entstehen kann, scheint ausgeschlossen. Aber die Feuchtigkeitsreste sind verdächtig, da durch ihre Zersetzung leicht Wasserstoff entstehen kann. Hr. Prof. Abegg machte mich auf eine Arbeit von Brereton Baker¹⁾ aufmerksam, wonach bei der Anwendung gewöhnlicher Phosphorsäure als Trocknungsmittel noch chemisch wirksame Feuchtigkeitsreste zurückbleiben, die durch Abkühlen mit flüssiger Luft oder Anwendung sublimierter Phosphorsäure beseitigt werden können. Eine Anwendung dieser Methoden schien vor allem erforderlich. Ich liess den aus Permanganat erzeugten Sauerstoff durch ein gläsernes Schlangenrohr von 1,5 m Länge gehen, das in flüssige Luft tauchte. Ein Einfluss auf die Entladung war unverkennbar. Das Fluoreszenzlicht, das von den positiven Elektronen auf dem Glase hervorgerufen wurde und überhaupt beim Sauerstoff schwach war, hörte fast vollständig auf, der Verlauf der Strahlen wurde auch bei grosser Verdünnung so diffus, dass die Beobachtung sehr erschwert wurde.

Die Grundlagen der Messung wurden einer erneuten Prüfung unterzogen. Insbesondere hatte Hr. Dr. Bädeker die Freundlichkeit, das magnetische Feld mit Hilfe eines Bifilargalvanometers genau durchzumessen.

1) Brereton Baker, Transact. of chem. soc. p. 422. 1898; p. 401. 1902.

Bei mehreren Beobachtungen ergab sich für den grössten Wert der spezifischen Ladung die Zahl 470, während bei einer Beobachtung das lange an die Dunkelheit gewöhnte Auge noch die Wirkung von Elektronen erkennen konnte, deren spezifische Ladung gegen 9000 betrug.

Diese Beobachtungen, die gerade an der Reizschwelle des Auges liegen, sind natürlich misslich und es kann von Zufälligkeiten abhängen, ob man die Wirkung in einem Fall noch gerade wahrnimmt, während sie im anderen bereits unter die Reizschwelle gesunken ist.

Aehnliche Ergebnisse hatten die Versuche mit sublimierter Phosphorsäure. Ich habe diese Sublimation in zwei verschiedenen Arten ausgeführt. Einmal wurde seitlich an die von der Pumpe zur Entladungsröhre führende Glasröhre eine lange Röhre von 1 m Länge und 2 cm Weite angeschmolzen, die in der Mitte eine Verengung hatte. Der Raum zwischen der Verengung und dem Ende der Röhre wurde mit möglichst wasserfreier Phosphorsäure gefüllt. Nachdem dann das äusserste Vacuum hergestellt war, wurde diese Phosphorsäure durch Erhitzen in die andere Hälfte der Röhre hinübergetrieben, wobei ein ansehnlicher Rest von Metaphosphorsäure zurückblieb. Die Röhrenhälfte mit den Rückständen wurde darauf abgeschmolzen. Diese Operation hatte auf die Verhältnisse in der Entladungsröhre keinen Einfluss. Die Diffusion der Wasserdämpfe erfolgt offenbar zu langsam, als dass die Phosphorsäure in dem Nebenraum zur Wirksamkeit gelangen könnte. Indessen zeigte sich auch kein Einfluss, wenn die Phosphorsäure in die Verbindungsröhre von dem Gefäss mit Kaliumpermanganat zur Entladungsröhre hineindestilliert wurde.

Erst als ich den Sauerstoff von der Phosphorsäure absorbieren liess und durch Erhitzen im äussersten Vacuum wieder vertrieb, zeigten sich dieselben Erscheinungen wie bei flüssiger Luft. Die spezifische Ladung ergab sich bei vielen Beobachtungen im Maximum

750,

indem für die maximale Ablenkung die Strahlen

durch ein magnetisches Feld von 2000 C.G.S um 2,2 cm,
 „ „ elektrisches „ „ 400 Volt „ 1,2 „

abgelenkt wurden.

Dann kamen wieder Beobachtungen vor, wo man mit grosser Anstrengung stärker ablenkbare Strahlen wahrnehmen konnte, deren spezifische Ladung wieder

9000

betrug.

Uebrigens zeigte sich, dass man auch aus der Phosphorsäure ohne vorhergehende Absorption, nachdem alle Luft durch Auspumpen beseitigt ist, Sauerstoff entwickeln kann. Man gewinnt aber erst durch sehr langes Erhitzen so viel, als zum Vermitteln der Entladung erforderlich ist.

Das Sublimiren der Phosphorsäure ist ein recht empfindliches Verfahren, weil die Temperatur an die Grenze getrieben werden muss, bei der ein Weichwerden des Röhrenglases eintritt. Schwer schmelzbares Glas lässt sich nicht verwenden, weil es sich nicht mit den übrigen Röhren zusammenschmelzen lässt.

Nachdem diese Versuche mit Sauerstoff beendet waren, wurde wieder Wasserstoff eingeleitet. Es dauerte einige Tage, bis die von den Metallen durch die lange Behandlung mit Sauerstoff absorbirten Gase ausgetrieben waren und die Entladung durch reinen Wasserstoff ging. Dann war wieder kräftige hellgrüne Fluorescenz des Glases vorhanden und die grösste spezifische Ladung ergab sich aus einer

magnetischen Ablenkung von 2 cm bei einem Felde von 380 C.G.S.,
elektrischen „ „ 1 „ „ einer Spannung von 200 Volt

gleich 9530.

Es ist mir nicht möglich gewesen trotz der viel helleren Fluorescenz des Wasserstoffs Elektronen von grösserer Ablenkbarkeit zu beobachten. Mit Rücksicht auf den Einfluss, den die Beseitigung des Wasserdampfes bei den Beobachtungen mit Sauerstoff zeigte, scheint es mir daher wahrscheinlich, dass sich keine positiven Elektronen mit grösserer spezifischer Ladung als sie das geladene Ion hat, ausbilden und dass die Spuren von solchen beim Sauerstoff auf Wasserstoffreste zurückzuführen sind.

Sowohl bei den Beobachtungen mit Sauerstoff als auch bei Wasserstoff wurde die Fluorescenz des Glases in einen geraden Streifen auseinandergezogen, der von der Stelle der unabgelenkten Strahlen ausging. Die Geschwindigkeit der

Elektronen ist also constant und die spezifische Ladung nimmt mit der Ablenkbarkeit continuirlich ab.

Diese Beobachtungen von positiven Elektronen haben nun auch offenbar für die Frage nach der Natur der negativen Elektronen besondere Bedeutung.

Man hat nämlich bisher die Ladung der negativen Elektronen stillschweigend als gleich der Ladung eines Wasserstoffions angenommen und dann die zugehörige Masse als entsprechend kleiner angesehen.

Diese Annahme ist aber mit den Eigenschaften der positiven Elektronen nicht gut vereinbar. Es könnte dann nämlich einem positiven Elektron niemals weniger negative Elektrizität, als die Ladung eines Wasserstoffions ausmacht, fehlen. Die continuirliche Verschiedenheit der spezifischen Ladung könnte dann nur durch Veränderung ihrer Masse, also durch Zusammenfügen einer grösseren Zahl von ungeladenen Moleculen zu einem durch Abspalten eines negativen Elektrons positiv geladenen erklärt werden. Zur Annahme der Bildung solcher Molecularcomplexe wird man sich zunächst wohl schwer entschliessen.

Einfacher ist es, die Möglichkeit zuzulassen, dass das negative Elektron einen nur kleinen Teil der Ladung des Ions besitzt. Dann könnten die Moleculé durch die Aufnahme einer verschiedenen Anzahl negativer Elektronen verschiedene spezifische Ladung besitzen. Allerdings müsste die Masse des negativen Elektrons in demselben Verhältnis kleiner angenommen werden und die negativen Elektronen wären dann als noch viel kleiner anzusehen, als bisher angenommen wurde.

Würzburg, Physikalisches Institut, 28. Juli 1902.

(Eingegangen 29. Juli 1902.)

11. *Ueber den Einfluss der Temperatur auf die Elasticität der Elemente, von Clemens Schaefer.*

(Zweite Mitteilung.)

In einer früheren Arbeit¹⁾ habe ich die Temperaturcoefficienten für den Elasticitäts- und Torsionsmodul von zehn Metallen bestimmt; dabei ergab sich eine Reihe von Gesetzmässigkeiten, die in der vorliegenden Arbeit weiter verfolgt werden. Die untersuchten Materialien waren Platin, Palladium, Eisen, Nickel, Gold, Kupfer, Silber, Aluminium, Zink, Blei; es wurde besonderes Gewicht darauf gelegt, dass dieselben chemisch und physikalisch wohl definirt waren: sie waren einerseits „chemisch rein“ und andererseits auf den sogenannten „Normalzustand“ gebracht, beides unerlässliche Vorbedingungen für constante und von Zufälligkeiten freie Resultate.

Von den damals erhaltenen Ergebnissen mag hier angeführt werden, dass innerhalb des Temperaturintervalles von -200°C. bis $+20^{\circ}\text{C.}$ die genannten elastischen Moduln als lineare Functionen der Temperatur dargestellt werden können, d. h. dass die Temperaturcoefficienten constant sind. Ferner zeigte es sich, dass dieselben in einem gewissen Zusammenhange mit den mittleren thermischen Ausdehnungcoefficienten um den Schmelztemperaturen stehen, so zwar, dass die betreffenden Stoffe, wenn sie nach steigenden Temperaturcoefficienten des Elasticitäts- oder Torsionsmoduls geordnet sind, ebenfalls nach steigenden Ausdehnungcoefficienten und fallenden Schmelztemperaturen aufeinanderfolgen, letzteres im Einklange mit der schon länger bekannten Regel, dass das Product des Ausdehnungcoefficienten in die in absoluten Temperaturgraden

1) Cl. Schaefer, Ann. d. Phys. 5. p. 220. 1901.

gemessene Schmelztemperatur für alle Stoffe nahezu constant ist. Der innere Grund für diese auf den ersten Blick auffallenden Beziehungen ist die gemeinsame Abhängigkeit der thermischen Ausdehnung, der Höhe der Schmelztemperatur und der Temperaturcoefficienten der Elasticität von dem *atomistischen Aufbau* der betreffenden Substanz.

Von den sämtlichen in meiner früheren Arbeit untersuchten Stoffen war Gold der einzige, der eine Abweichung zeigte. Versuchs- und Beobachtungsfehler sind um so unwahrscheinlicher, als genau das nämliche Verhalten des Goldes aus einer Arbeit von Katzenelsohn¹⁾ hervorgeht; am wahrscheinlichsten schien mir damals die Erklärung, dass die Abweichung bedingt sei durch den Umstand, dass alle Messungen bei Gold unter Ueberschreitung der Elasticitätsgrenze ausgeführt werden mussten. Eine Goldlegirung mit Silbergehalt²⁾, wodurch die ausserordentlich niedrige Elasticitätsgrenze des Goldes heraufgesetzt wird, fügte sich in der That der in Rede stehenden Gesetzmässigkeit.

Ich habe nun in der vorliegenden Arbeit diesen Punkt weiter verfolgt durch Messungen derselben Art an Cadmium, Magnesium, Zinn, Iridium, Rhodium, Kohlenstoff; sehr viel mehr Materialien wird man überhaupt nicht untersuchen können, da schon das Arbeiten mit so weichen Stoffen wie Cd, Mg, Sn einerseits und so spröden wie Ir, Rh, C andererseits erhebliche Schwierigkeiten bietet. Aus diesen Gründen ist mir die Untersuchung der Aenderung des *Elasticitätsmoduls* mit der Temperatur unmöglich gewesen, bei den ersteren wegen der sehr stark auftretenden elastischen Nachwirkung, bei den letzteren wegen ihrer geringen Zerreiissfestigkeit. Ich habe mich also notgedrungen darauf beschränkt, die Aenderung des *Torsionsmoduls* mit der Temperatur zu messen; diese Bestimmungen genügen aber schon zu der Erkenntnis, dass die eben besprochenen Regelmässigkeiten zwar im allgemeinen zu Recht bestehen, aber keinen Anspruch auf strenge Gültigkeit machen können. Eine genauere Ueberlegung zeigt auch sofort, dass eine solche von vornherein unwahrscheinlich ist: es liegt näm-

1) N. Katzenelsohn, Inaug.-Diss. p. 62 ff. 1887.

2) Die Analyse ergab 82,29 Proc. Au, 17,45 Ag, Cu: Spuren.

lich offenbar eine grosse Willkür darin, *veränderliche* Grössen, die für ein ebenfalls willkürlich gewähltes Temperaturintervall bestimmt sind, mit *constanten* Grössen (Schmelztemperatur) zu vergleichen. Vielleicht würde man strengere Gültigkeit dieser Gesetzmässigkeiten finden, indem man bei den genannten Coefficienten nur die von der Temperatur unabhängigen Glieder berücksichtigt, ein Verfahren, dass vorläufig aus Mangel an experimentellem Material unmöglich ist. Indessen wird man sich von diesen Gesetzmässigkeiten leiten lassen dürfen, wenn es sich nur um *Grössenordnungen* handelt; vergleiche über diesen Punkt weiter unten.

Für die vorliegende Arbeit konnte ich denselben Apparat benutzen, den ich früher schon benutzt und ausführlich beschrieben habe¹⁾; ich möchte auch an dieser Stelle Hrn. Geheimrat Warburg für die Liebenswürdigkeit und Bereitwilligkeit, mit der er mir denselben zur Verfügung stellte, meinen besten Dank aussprechen.

Was die Methode der Beobachtung angeht, sei kurz bemerkt, dass die durch dasselbe Drehungsmoment einmal bei Zimmertemperatur, das andere Mal in einem Kältebade (Kohlensäureschnee—Aether) bewirkte Torsion des Drahtes (w_t bez. w_0) bestimmt wurde. Daraus, aus der Temperaturdifferenz und aus dem thermischen Ausdehnungskoeffizienten (Correctionsglied wegen der Volumenänderung), kann man dann die procentische Aenderung des Torsionsmoduls pro 100° Temperaturdifferenz berechnen. Ausserdem habe ich da, wo es anging, noch den Torsionsmodul selbst aus Schwingungen bestimmt (Bezeichnung: T_t Schwingungsdauer des Systems bei Zimmertemperatur; T'_t desgleichen mit hinzugefügtem Trägheitsmoment P ; r_t Radius, l_t Länge, k_t Torsionsmodul).

Ich lasse nunmehr die Messungen selbst folgen: Zur Beurteilung der Genauigkeit ist für die Materialien mit den schlechtesten elastischen Eigenschaften, Cadmium und Zinn, eine willkürlich herausgegriffene Beobachtungsreihe angeführt. Der Scalenabstand betrug ca. 2000 Sct.

Die erste Columnne enthält die erste Ruhelage ohne Drehmoment, die zweite die Neueinstellung infolge der Wirkung

1) Cl. Schaefer, l. c. p. 221 ff.

des ablenkenden Momentes, die dritte die Ablenkung selbst, die vierte die anzubringende Correction wegen der elastischen Nachwirkung, die fünfte die endgültige, corrigirte Ablesung, die sechste die Temperatur.

I. Cadmium.

(Chemisch rein; sogenanntes Cadmium „Kahlbaum“ von C. A. F. Kahlbaum.)

Erste Nulllage	Zweite Nulllage	Ablenkung	Correction wegen elastischer Nachwirkung	w	Temperatur
450	340	110	-4	106	} 18° C.
450	342	108	-1	107	
450	341	109	-1	108	
450	339	111	-2	109	
446	346	106	-1	105	
Mittel 107 Set.					
				w_0	} -46° C.
350	268	82	0	82	
350	268	82	0	82	
350	268	82	0	82	
350	268	82	0	82	
350	268	82	0	82	
Mittel 82 Set.					

Man ersieht aus der Tabelle, wie selbst ein so schlechtes Material wie Cadmium für tiefe Temperaturen ganz vorzügliche elastische Eigenschaften erhält.

Aus meinen sämtlichen Messungen berechnet sich der Temperaturcoefficient des Torsionsmoduls zu

$$\Delta k = 46,7 \text{ Proc. pro } 100^\circ \text{ C. Temp.-Diff.}$$

Die absoluten Messungen ergaben:

$$\left. \begin{array}{l} \tau_t = 0,503 \text{ mm} \\ l_t = 15 \text{ cm} \\ T_t = 0,51 \text{ sec} \\ T'_t = 3,21 \text{ sec} \\ P = 6527 \text{ g cm}^2 \end{array} \right\} \text{ Daraus } k_t = 1024 \text{ kg/mm}^2.$$

II. Magnesium.

Hier ergab sich

$$\Delta k = 30,2 \text{ Proc. pro } 100^\circ \text{ C. Temp.-Diff.}$$

Ferner aus den absoluten Messungen:

$$\left. \begin{array}{l} l_i = 14,5 \text{ cm} \\ r_i = 0,298 \text{ mm} \\ T_i = 1,78 \text{ sec} \\ T'_i = 3,16 \text{ sec} \\ P = 6527 \text{ g cm}^2 \end{array} \right\} k_i = 1181 \text{ kg/mm}^2.$$

III. Zinn.

(Chemisch; von C. A. F. Kahlbaum.)

Erste Nulllage	Zweite Nulllage	Ablenkung	Correction wegen elastischer Nachwirkung	w_i	Temperatur
600	556	44	- 8	36	} 22,4° C.
600	563	37	- 2	35	
600	563	37	- 2	35	
600	563	37	- 2	35	
600	563	37	- 1	36	
600	563	37	- 1	36	
Mittel 35,5 Sct.					
				w_0	
600	576	24	- 3	21	} -63,7° C.
600	579	21	0	21	
600	578	22	- 1	21	
600	579	21	0	21	
600	579	21	- 1	20	
Mittel 20,8 Sct.					

Als Mittelwert ergab sich hier

$$\Delta k = 82 \text{ Proc. pro } 100^\circ \text{ C. Temp.-Diff.}$$

Sn ist das einzige von den untersuchten Materialien, dass bei tiefen Temperaturen innerhalb kurzer Zeit elastische Nachwirkung zeigte; dieselbe betrug, wie aus der Tabelle hervorgeht, bis zu 3 Sct., wenn das Drehmoment etwa 20 Sec. (im

Höchstfalle) gewirkt hatte. Aus der Formel von F. Kohlrausch¹⁾ für die Abhängigkeit der elastischen Nachwirkung von der Temperatur würde durch Extrapolation folgen, dass dieselbe bei $-21,5^{\circ}$ verschwindet, eine Folgerung, die Kohlrausch selbst für unwahrscheinlich erklärt hat. Die obige Beobachtung dürfte die erste Bestätigung der Vermutung Kohlrausch's sein.

IV. u. V. Iridium und Rhodium.

(Chemisch rein; von W. C. Heraeus.)

Da Iridium und Rhodium nicht gezogen werden können, sondern gehämmert werden müssen, war der Querschnitt nicht kreisrund, sondern einigermaassen quadratisch. Während dies auf die Bestimmung des Temperaturcoefficienten ohne Einfluss ist²⁾, erschwert es die Messung der absoluten Werte des Torsionsmoduls ausserordentlich; ich habe dieselbe deshalb unterlassen. Beide Metalle zeigten selbst bei stundenlanger Einwirkung des Drehungsmomentes *keine* Nachwirkung; die Ablesungen konnten daher sehr genau ($\frac{1}{10}$ mm) gemacht werden.

Für Iridium ergab sich: $\Delta k = 4,08$ Proc. } pro 100° C. Temp.-Diff.
 „ Rhodium „ „ „ $\Delta k = 3,69$ „ }

VI. Kohlenstoff.

Ich habe den Kohlenstoff in Form von Retortenkohlen untersucht, die mir die Firma Gebr. Siemens in Charlottenburg bereitwilligst zur Verfügung stellte. Dieselben waren von aussen sehr gleichartig und zeigten auch bei Bruch keinerlei schadhafte Stellen. Messungen an zwei Exemplaren (r , etwa 1 mm) gaben — fast wider Erwarten — sehr gut übereinstimmende Resultate; Nachwirkung konnte ebenso wenig beobachtet werden, wie bei Ir und Rh; die Ablesung erreichte daher hier denselben Grad von Genauigkeit. Als Mittelwert erhielt ich die Zahl

$\Delta k = 1,25$ Proc. pro 100° C. Temp.-Diff.

In der folgenden Tabelle sind die sämtlichen Messungen zusammengestellt.

1) F. Kohlrausch, Pogg. Ann. 128. p. 222. 1866.

2) St. Venant, Compt. rend. 88. p. 142. 1879.

Material	Aus- dehnungs- coefficient	Torsions- modul	Temp.-Coeff. des Torsions- moduls	Schmelz- temperatur
Carboneum	0,0 ₅ 50	—	1,25	sehr hoch
Iridium	0,0 ₅ 70	—	4,03	2500°
Rhodium	0,0 ₅ 85	—	3,69	2000
Platin	0,0 ₅ 907	6594	1,78	1765
Palladium	0,0 ₄ 1104	4613	2,70	1600
Ferrum	0,0 ₄ 1113	7337	3,035	1500
Nickel	0,0 ₄ 1279	9518	3,28	1400
Aurum	0,0 ₄ 1454	—	3,01	1070
Cuprum	0,0 ₄ 1698	3967	4,49	1100
Argentum	0,0 ₄ 1900	2467	8,21	970
Aluminium	0,0 ₄ 2336	2929	24,7	645
Magnesium	0,0 ₄ 2694	1181	80,2	600
Zinkum	0,0 ₄ 2905	1614	48,4	419
Plumbum	0,0 ₄ 2948	550	78,7	327
Cadmium	0,0 ₄ 3060	1024	46,7	320
Stannum	—	—	82,0	230
Lithium	—	—	120,0	180
Natrium	0,0 ₄ 72	—	130,0	90
Kalium	0,0 ₄ 83	—	150,0	58
Rubidium	—	—	170,0	38
Cäsium	—	—	180,0	26

Die Tabelle zeigt deutlich, dass die in Rede stehende Gesetzmässigkeit im allgemeinen erfüllt ist; Ausnahmen bilden nur Ir, Rh, Au, Cd; doch ist auch hier die *Grössenordnung* richtig. Der Tabelle sind zugefügt die Metalle Li, Na, K, Rb, Cs und ihre Temperaturcoefficienten für den Torsionsmodul, die auf folgende Weise gewonnen worden sind: Der Zusammenhang zwischen der Schmelztemperatur und den Temperaturcoefficienten des Torsionsmoduls ist auf p. 231 in meiner früheren Arbeit durch eine Curve dargestellt, in der als Abscissen die Schmelztemperaturen, als Ordinaten die genannten Coefficienten aufgetragen sind. Aus dieser Curve sind durch sorgfältige graphische Extrapolation aus den bekannten Schmelztemperaturen die Werte gewonnen worden:

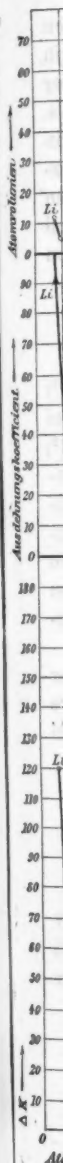
Li: 120 Proc., Na: 130 Proc., K: 150 Proc., Rb: 180 Proc., Cs: 190 Proc.

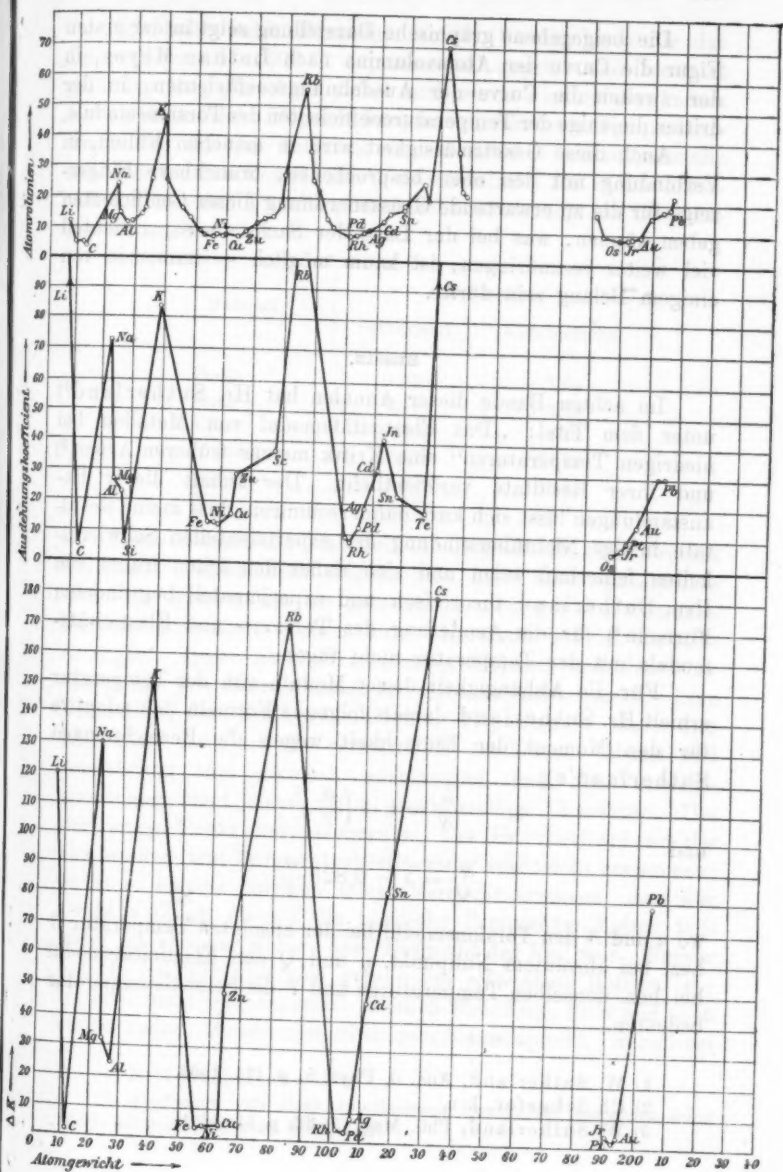
Natürlich sind diese Zahlen mit erheblicher Unsicherheit behaftet, aber selbst wenn sie um 100 Proc. falsch sind, verlieren sie doch nicht ihre Beweiskraft; jedenfalls wird man ihre *Grössenordnung* als zutreffend betrachten dürfen.

Material	Atom-Gewicht	Ausdehnungs-coefficient	Δk	Material	Atom-Gewicht	Ausdehnungs-coefficient	Δk
Lithium	7	gross	120 %	Ruthenium	101	9,6	—
Kohlenstoff	12	5	1,25	Rhodium	102	8	3,7 %
Natrium	23	72	130	Palladium	105	11,7	9,7
Magnesium	24	27	30,2	Silber	107	19	8,2
Aluminium	27	23	24,7	Cadmium	111	31	46,7
Silicium	28	7	—	Indium	113	41	—
Kalium	39	88	150	Zinn	118	22	82
Eisen	56	13	3,03	Cäsium	132	{ sehr gross }	180
Nickel	58	12,7	3,3	Osmium	189	6	—
Kobalt	59	12	—	Iridium	192	7	4
Kupfer	63	16,7	4,5	Platin	193	9	1,8
Zink	65	29	48	Gold	196	14	3
Selen	78	37	—	Thallium	203	30	—
Rubidium	85	{ sehr gross }	170	Blei	205	30	78,7

Ihre Hinzufügung hat folgenden Grund: Wenn man die oben bereits erwähnte gemeinsame Abhängigkeit von Schmelztemperatur, Ausdehnungscoefficient und Temperaturcoefficient vom atomistischen Aufbau der Substanz dadurch zum Ausdruck bringt, dass man die betreffenden Stoffe nach ihrem Atomgewicht steigend anordnet, so bemerkt man bei diesen genannten drei Grössen ein Auf- und Abschwanken, das Auftreten relativ regelmässig verteilter *Maxima* und *Minima*; die Maxima nun fallen gerade auf die genannten Stoffe Li, Na, K, Rb, Cs. Diese Erscheinung gleicht in qualitativer Hinsicht durchaus dem Verhalten des Atomvolumens, was besonders klar hervortritt durch die beigefügte graphische Darstellung (vgl. p. 673). Wenn man die übliche Ausdrucksweise adoptirt, kann man dieses Resultat folgendermaassen aussprechen:

Die Schmelztemperaturen, Ausdehnungscoefficienten und Temperaturcoefficienten der Elasticitätsmoduln sind periodische Functionen des Atomgewichtes.





Die beigegebene graphische Darstellung zeigt in der ersten Figur die Curve der Atomvolumina nach Lothar Meyer, in der zweiten die Curve der Ausdehnungscoefficienten, in der dritten diejenige der Temperaturcoefficienten des Torsionsmoduls.

Auch diese Gesetzmässigkeit wird in manchen Fällen, in Verbindung mit den oben besprochenen, brauchbare Fingerzeige für die zu erwartende Grössenordnung dieser Coefficienten geben können, was bei der Lage der Sache — experimentell viel weiter vorzudringen, ist kaum möglich — immerhin von einigem Belang sein dürfte.

Zusatz.

Im achten Bande dieser Annalen hat Hr. Sutherland¹⁾ unter dem Titel: „Das Elasticitätsmodul von Metallen bei niedrigen Temperaturen“ eine Kritik meiner früheren Arbeit²⁾ und ihrer Resultate veröffentlicht. Der Inhalt dieser Beanstandungen lässt sich kurz dahin resumiren, dass meine Resultate infolge Nichtüberwindung der experimentellen Schwierigkeiten fehlerhaft seien und sich daher den schon früher von Hrn. Sutherland theoretisch und experimentell begründeten Formeln³⁾ für die Aenderung des Torsions- und Elasticitätsmoduls mit der Temperatur nicht fügen.

Für die Abhängigkeit dieser Moduln von der Temperatur erhielt Hr. Sutherland damals folgende Formeln (ich adoptire für den Moment der Einfachheit wegen die Bezeichnungen Sutherland's):

$$\frac{n}{N} = 1 - \left(\frac{\vartheta}{T}\right)^2$$

und

$$\frac{q}{Q} = 1 - 0,823 \frac{\vartheta}{T},$$

wo n und N den Torsionsmodul bei der absoluten Temperatur ϑ bez. bei absolutem Nullpunkt, q und Q den Elasticitätsmodul bei bez. denselben Temperaturen und T die Schmelztemperatur bedeuten.

1) W. Sutherland, Ann. d. Phys. 8. p. 474. 1902.

2) Cl. Schaefer, l. c.

3) W. Sutherland, Phil. Mag. (5) 32. p. 31. 1891.

Ich halte beide Formeln, die Hr. Sutherland für das Intervall von 0—100° C. experimentell geprüft und bestätigt gefunden hat, für *direct falsch* und werde dies zeigen, indem ich die nach diesen Formeln berechneten mittleren Temperatur-coefficienten für das Intervall von 0—100° C. zusammenstelle mit den von Katzenelsohn¹⁾ einwandsfrei²⁾ für dieses Intervall bestimmten. Für die procentische Aenderung des Torsionsmoduls ergibt sich so:

Material	Δk nach	
	Sutherland	Katzenelsohn
Platin	1,59	1,64
Eisen	2,114	3,10
Silber	4,365	7,10
Aluminium	8,403	21,30
Zink	8,958	40,0
Blei	22,63	80,0

Diese Zahlen, die zum Teil um mehrere Hundert Procent voneinander abweichen, zeigen, dass die Fehler *systematische* sind: sie werden um so grösser, je niedriger die Schmelztemperaturen sind. Schon dieser Umstand beweist die Unrichtigkeit dieser Sutherland'schen Formel; mit der Gleichung für den Elasticitätsmodul steht es nicht besser. Eine Discussion der Sutherland'schen Experimente lässt dies fehlerhafte Resultat als verständlich erscheinen: Mittel und Ausführung sind gänzlich unzulänglich und die Versuchsanordnung trägt einen völlig provisorischen Charakter. Um nur einen Punkt herauszugreifen, hat Hr. Sutherland die Erwärmung und Temperaturbestimmung sehr leicht genommen: es ist in keinem einzigen seiner Versuche erwiesen, dass der Draht wirklich überall die nämliche Temperatur hatte; teilweise ist es sogar sicher, dass dies nicht der Fall war. Ferner hat Hr. Sutherland sich gerade das *schlechteste* Material zur Untersuchung vorgenommen, nämlich Blei, Zinn, Zink und noch einige andere Metalle mit niedrigem Schmelzpunkt. Schon bei

1) N. Katzenelsohn, l. c.

2) Abgesehen von einer unterlassenen Correction, weswegen seine Werte sämtlich etwas zu klein sind.

Zimmertemperatur ist mit diesem Material kaum zu arbeiten; für höhere Temperaturen muss ich nach meinen Erfahrungen die Möglichkeit, einwandfreie Resultate zu erzielen, schlechtweg bestreiten. Dazu noch ist dieses Material durchweg sogenanntes „käuflisches“, d. h. *verunreinigtes*, während es doch bekannt ist, dass schon relativ geringe Beimengungen die elastischen Eigenschaften vollkommen zu ändern vermögen. Den experimentellen Bestimmungen kann ich demgemäss keinerlei Beweiskraft zuerkennen. Aber selbst angenommen, die experimentellen Resultate Sutherland's seien richtig, so ist doch die Grenzbedingung, die er seiner Formel für den Torsionsmodul auferlegte, falsch und infolge dessen die ganze Gleichung hinfällig. Nach derselben wird nämlich beim Schmelzpunkte der Torsionsmodul gleich Null. Nun ist es ja klar, dass eine *Flüssigkeit* keine Torsionselasticität besitzt; aber beim Schmelzpunkt existirt auch die *feste* Phase, und um diese handelt es sich hier allein; dieselbe besitzt natürlich einen *endlichen* Wert des Moduls. Ein gutes Beispiel für das letztere bietet *Eis* bei 0° C.: weder *Elasticitäts-* noch *Torsionsmodul* sind gleich *Null*, sondern haben noch recht erhebliche Werte: dagegen besitzt der Quercontractionscoefficient μ seinen grössten Wert $\frac{1}{3}$. Damit erledigt sich auch der *principielle* Einwand, den Hr. Sutherland gegen meine Berechnung der Schmelztemperatur nach der Formel

$$(1 + \mu_0) \frac{1 - \alpha T}{1 - \beta T} = \frac{3}{2} \quad ^1)$$

erhoben hat. —

Aus diesen Gründen erscheint mir der Schluss unabweisbar, dass weder Sutherland's Theorie noch Experimente einwandfrei, daher auch nicht im Mindesten geeignet sind, über Richtigkeit oder Unrichtigkeit meiner eigenen Ergebnisse zu entscheiden.

Charlottenburg, Physik. Institut d. Techn. Hochschule,
im Juli 1902.

1) Cl. Schaefer, l. c.

(Eingegangen 30. Juli 1902.)

**12. Ueber das Verhalten
des krystallinischen Wismuts im Magnetfeld;
von Louis Lownds.**

(Zweite Mitteilung.)

§ 1.

Die vorliegende Arbeit ist eine Fortsetzung einer früheren über das thermomagnetische und thermoelektrische Verhalten des krystallinischen Wismuts.¹⁾ Sie enthält Bestimmungen der elektrischen Widerstandsänderung im Magnetfeld, des Halleffectes und der Wärmeleitungsfähigkeit im Magnetfeld und aussserhalb des Magnetfeldes für den in der früheren Arbeit gebrauchten Wismutkrystall. Die elektrische Widerstandsänderung und der Halleffect wurden parallel und senkrecht zur krystallographischen Hauptaxe bestimmt. Das Verhältnis der Wärmeleitungsfähigkeit parallel und senkrecht zur Hauptaxe wurde gemessen.

§ 2. Die Veränderung des elektrischen Widerstandes im Magnetfeld.

Die Krystallplatte *abcd* (Fig. 1) war in einen kleinen Holzrahmen *ABCD* eingesetzt, der $4\frac{1}{2}$ cm lang, $2\frac{1}{2}$ cm breit und 1 cm dick war. Ein rechteckiges Stück war bei *abcd* ausgeschnitten, sodass die Platte genau hineinpasste; die vordere Krystallfläche war bündig mit der vorderen Fläche des Holzes. Es kamen zwei derartige Rahmen zur Verwendung, je nachdem der Effect parallel oder rechtwinklig zur Richtung der Hauptaxe zu messen war. Durch die Platte wurde mit Hülfe von Drähten, welche an die bei *ab* und *cd* befindlichen Kupferstreifen angelötet waren, ein Strom geschickt. Diese Kupferstreifen waren fest an den Krystall ge-

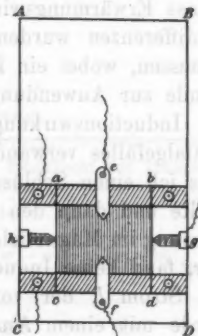


Fig. 1.

1) L. Lownds, Ann. d. Phys. 6. p. 148. 1901.

schraubt und zwischen ihnen und der Platte befanden sich schmale Stanniolstreifen, um guten Contact zu erzielen und ein Durchbrechen zu vermeiden. Zwei Messingfedercontacte e und f dienten als Elektroden bei der Messung der Potentialdifferenz zwischen irgend zwei Punkten der Platte. Diese Contacte waren so abgepasst, dass sie zwei auf einer zu den Kupferstreifen senkrechten Linie befindliche Punkte gerade berührten. Dann wurde ein Strom von bekannter Stärke durch die Platte geschickt und die Potentialdifferenz zwischen jenen beiden Punkten gemessen. Darauf wurde das Feld erregt und die Bestimmung wiederholt, während der Strom durch die Platte auf dieselbe Stärke wie früher eingestellt war. Wenn e_0 die Potentialdifferenz ohne Magnetfeld, w_0 den Widerstand zwischen den Punkten, I die Stromstärke und e und w die entsprechenden Werte bei erregtem Magnetfeld bedeuten, dann ist

$$I = \frac{e_0}{w_0} = \frac{e}{w}.$$

Also

$$\frac{w}{w_0} = \frac{e}{e_0}$$

und die procentische Widerstandszunahme im Felde

$$= 100 \frac{w - w_0}{w_0} = 100 \frac{e - e_0}{e_0}.$$

Der Strom wurde nur auf einen Augenblick geschlossen, sodass Erwärmungswirkungen vermieden wurden. Die Potentialdifferenzen wurden vermittelst der Compensationsmethode gemessen, wobei ein Drehspulgalvanometer von hohem Widerstande zur Anwendung kam.

Inductionswirkungen seitens des zur Herstellung des Potentialgefälles verwandten Stromes vermied ich in der Weise, dass ich einen Schlüssel benutzte, der erst diesen Strom herstellte und dann den Galvanometerkreis schloss. Da bei der Messung im Magnetfeld dieses die ganze Zeit über eingeschaltet war, fand keine Inductionswirkung durch dasselbe statt.

Strom I , der von der Grössenordnung 1—2 Amp. war, wurde mit einem Ampèremeter gemessen, dessen Ablesungen bis $\frac{1}{2}$ Proc. gingen. Die elektromotorischen Kräfte waren von der Ordnung 300—600 Mikrovolt und konnten bis auf mindestens 1 Proc. bestimmt werden.

Es fanden Beobachtungen statt:

1. bei gewöhnlicher Temperatur, während die ganze Platte in ein Petroleumbad tauchte;

2. bei -79° C. in einer Mischung von Kohlensäureschnee und Aether, die in einem versilberten Dewar'schen Gefäss enthalten war;

3. bei -186° C. in flüssiger Luft.

Der absolute Widerstand zwischen den beiden Elektroden e und f , bez. $w_0 = e_0/I$ ermöglicht uns die annähernde Berechnung des spezifischen Widerstandes ρ der Platte.

Wir haben

$$\rho = \frac{w_0 \cdot a}{l} \text{ Ohm pro cm/cm}^2,$$

wo a den Querschnitt der Platte und l die Entfernung zwischen den Elektroden bedeutet. Da l von der Grössenordnung 5 mm war und geringe Unregelmässigkeiten an den Krystallkanten bestanden, kann dieses Ergebnis nur angenähert richtig sein. Die Bestimmung von ρ für beide Richtungen in der Platte wurde bei allen drei Temperaturen ohne Lagenänderung der Contacte vorgenommen.

Die Resultate für die procentische Widerstandsänderung sind in Tab. I gegeben und auf den Figg. 2 u. 3 graphisch dargestellt. Die ausgezogenen Linien beziehen sich auf den Fall parallel zur Hauptaxe, die punktierten Linien auf den Fall senkrecht zur Hauptaxe.

Tabelle I.
Widerstandsänderung.

Temp.	Parallel zur Hauptaxe			Senkrecht zur Hauptaxe		
	$22,5^{\circ}$	-79°	-186°	14°	-79°	-186°
Feldstärke	$100 \frac{(w_0 - w)}{w_0}$	$100 \frac{(w_0 - w)}{w_0}$	$100 \frac{(w_0 - w)}{w_0}$	$100 \frac{(w_0 - w)}{w_0}$	$100 \frac{(w_0 - w)}{w_0}$	$100 \frac{(w_0 - w)}{w_0}$
2120	5,0	22,5	33,5	3,9	9,6	6,1
3120	9,2	37,7	44,2	7,3	14,2	9,7
3500	12,1	43,1	47,4	8,6	15,7	10,6
4980	19,8	62,1	56,5	14,3	21,5	11,4

zusammen mit den von v. Everdingen¹⁾ bei gewöhnlicher Temperatur erhaltenen Werten.

Tabelle II.

Parellel zur Hauptaxe		Senkrecht zur Hauptaxe	
Temp.	ℓ C.G.S.	Temp.	ℓ C.G.S.
15°	269 000	15°	151 000
— 79	379 000	— 79	135 000
— 186	284 000	— 186	86 000
15°	348 000	15°	204 000 229 000 222 000

v. Everdingen hat einige Beobachtungen der Widerstandszunahme im Magnetfeld für krystallinisches Wismut angestellt. Folgende mögen zum Vergleich dienen.

Richtung	Temp.	Feldstärke	Procentische Widerstands- zunahme	
			Everdingen	Lownds
	15°	4600	13 %	27 %
⊥	15°	4600	9,9 %	12,5 %

Nach v. Everdingen's Beobachtungen ist das Verhältniß der Widerstände (ohne Feld) für beide Richtungen wie 1 : 1,68, während es sich für die von mir benutzte Krystallplatte wie 1 : 1,78 darstellt. Das Verhältniß der thermoelektrischen Kräfte für beide Richtungen (|| und ⊥) war zwischen den Temperaturen 10° und 100° mit Bezug auf Kupfer 1 : 1,91.

§ 3. Der Halleffect.

Die Hallconstante C ist durch die Gleichung

$$E = C \frac{I \cdot \Phi}{d}$$

definiert, wo auf Fig. 4 E die Potentialdifferenz zwischen den Punkten a und b darstellt, wenn ein Strom von der Stärke I

1) E. van Everdingen, Comm. Phys. Lab. Univ. Leyden 61. 1900.

von A nach B fließt und die Kraftlinien auf der Plattenebene senkrecht stehen. Vor Erregung des Feldes wird angenommen,

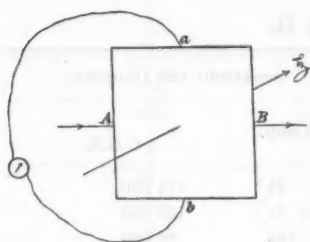


Fig. 4.

dass a und b auf einer äquipotentialen Linie liegen. Wenn der Strom I von A nach B geht und die Richtung des Feldes \mathcal{H} die auf der Figur angegebene ist, dann ist der Effect positiv, wenn der Hallstrom von a durch das Galvanometer nach b geht. Bei gewöhnlicher Temperatur ist für Wismut das Vorzeichen negativ.

Bei der Messung des Halleffectes an meiner Krystallplatte waren zwei verschiedene Fälle möglich. Das Magnetfeld war immer senkrecht zur Hauptaxe, aber Strom I war zu dieser Richtung entweder parallel oder rechtwinklig. Dieser Strom wurde vermittelt der Kupferstücke ab und cd durch die Platte geleitet. Zwei kleine Messingschrauben g und h (Fig. 1), die auf die Seiten des Krystalles fest aufdrückten, wurden als Elektroden zur Messung der Hall'schen elektromotorischen Kraft E benutzt. g konnte in der Längsrichtung des Krystalles bewegt werden und war so abgepasst, dass beim Durchgange des Stromes I die elektromotorische Kraft zwischen g und h so klein wie möglich war. Es war nicht möglich, die Schrauben genau auf eine äquipotentielle Linie einzustellen, doch hat dieser Einstellungsfehler auf den Mittelwert der Constante C keinen wahrnehmbaren Einfluss. Die elektromotorische Kraft wurde mit Hülfe der Compensationsmethode gemessen. Bei dieser Methode ist man von den Widerstandsänderungen der Platte, die auf Rechnung des Magnetfeldes kommen, unabhängig. Vor Erregung des Feldes wurde ein Strom von bekannter Stärke durch die Platte geschickt und die elektromotorische Kraft zwischen den Punkten g und h gemessen. Dann wurde das Feld erregt, der Strom auf dieselbe Stärke eingestellt und die elektromotorische Kraft wiederum gemessen. Die Differenz dieser beiden Ablesungen ergab die Hall'sche elektromotorische Kraft E . Die Messungen wurden mit entgegengesetztem Strome wiederholt — und so wurde auch für beide Stromrichtungen

verfahren, nachdem die Richtung des Feldes umgekehrt worden war. Als Maass des Effectes wurde sodann das Mittel aus diesen vier Werten angenommen. Um Erwärmung der Platte infolge des Stromdurchganges zu vermeiden, wurde Strom I nur momentan geschlossen. Ein Schlüssel diente dazu, diesen Primärkreis und unmittelbar darauf den secundären Stromkreis, der die Hallelektroden verband, zu schliessen; wenn die Hall'sche elektromotorische Kraft nicht genau compensirt war, wurde eine Ablenkung des Galvanometers wahrgenommen. Nach Probiren fand ich zwei Einstellungen, bei deren einer eine Ablenkung nach der einen Richtung stattfand, während sie für die andere in entgegengesetzter Richtung erfolgte. Diese Einstellungen differirten voneinander um nicht mehr als 1 Proc., und ihr Mittelwert wurde als Nullpunkt angenommen. Da der Primärstrom zuerst geschlossen wurde, so wurden Inductionswirkungen des primären auf den secundären Stromkreis vermieden.

Die Ergebnisse für beide Richtungen und für die drei Temperaturen sind in Tab. III und IV enthalten und in Fig. 5 und 6 graphisch dargestellt. Die ausgezogenen Linien beziehen sich auf den Fall, dass der Primärstrom der Hauptaxe parallel läuft, die punktirten Linien auf den Fall, dass der Primärstrom senkrecht zur Hauptaxe fliesst. Fig. 6 giebt den Mittelwert für die beiden Richtungen.

Die Stromrichtung mit Bezug auf die Hauptaxe scheint nur einen geringen Einfluss auf die Constante zu haben. Dies ist auch schon von v. Everdingen¹⁾ bei gewöhnlicher Temperatur beobachtet worden. Dieser fand bei einer Temperatur von 15° C. und einer Feldstärke von 4600 C.G.S.-Einheiten $C = -8,0$ und für eine Feldstärke = 2600 C.G.S. $C = -10,2$, wenn der Strom zur Hauptaxe parallel ging. Im anderen Falle fand er bei Benutzung von drei verschiedenen Platten für die Feldstärke 4600 C.G.S. $C = -10,6$, $-8,8$ und $-8,2$, und für die Feldstärke 2600 C.G.S. $C = -12,6$, $-11,1$ und $-10,6$. Diese Werte sind von derselben Grössenordnung wie die von mir gefundenen.

1) E. van Everdingen, l. c.

Tabelle III.
Halleffect. Primärstrom η zur Hauptaxe.

Φ	I Amp.	Temperatur 16°			Temperatur -79°			Temperatur -186°		
		E.M.K. M.-V.	E M.-V.	O	E.M.K. M.-V.	E M.-V.	O	E.M.K. M.-V.	E M.-V.	O
+4980	+2	-289	290	-10,3	-109	89	-3,16	+187	222	+ 7,88
+4980	-2	+302			+107			-188		
-4980	+2	+287			+ 69			-255		
-4980	-2	-284			- 71			+258		
+3500	+2	-227	226	-11,4	-127	117	-5,92	+148	175	+ 8,85
+3500	-2	+232			+135			-150		
-3500	+2	+222			+104			-203		
-3500	-2	-222			-104			+199		
+3120	+2	-204	200	-11,3	-134	122	-6,92	+197	161	+ 9,13
+3120	-2	+206			+133			-139		
-3120	+2	+196			+111			-186		
-3120	-2	-196			-110			+183		
+2120	+2	-145	142	-11,8	-122	115	-9,60	+111	125	+10,4
+2120	-2	+146			+124			-109		
-2120	+2	+141			+108			-141		
-2120	-2	-138			-107			+141		

Tabelle IV.
Halleffect. Primärstrom \perp zur Hauptaxe.

Φ	I Amp.	Temperatur 16°			Temperatur -79°			Temperatur -186°		
		E.M.K. M.V.	E M.V.	C	E.M.K. M.V.	E M.V.	C	E.M.K. M.V.	E M.V.	C
+4980	+2	-256	254	- 9,02	-162	67	-2,38	+100	183	+6,51
+4980	-2	+256			+155			- 99		
-4980	+2	+261			- 20			-271		
-4980	-2	-245			+ 29			+264		
+3500	+2	-194	197	- 9,97	-196	95	-4,81	+ 76	148	+7,51
+3500	-2	+194			+198			- 77		
-3500	+2	+208			0			-225		
-3500	-2	-195			+ 13			+216		
+3120	+2	-178	178	-10,1	-151	99	-5,61	+ 70	135	+7,62
+3120	-2	+175			+158			- 69		
-3120	+2	+185			+ 43			-202		
-3120	-2	-174			- 44			+198		
+2120	+2	-128	125	-10,4	-148	94	-7,85	+ 58	106	+8,89
+2120	-2	+124			+144			- 59		
-2120	+2	+127			+ 45			-161		
-2120	-2	-123			- 42			+148		

Es ist bemerkenswert, dass bei gewöhnlicher Temperatur nur sehr geringe Dissymmetrie im Effecte für die beiden entgegengesetzten Feldrichtungen stattfindet. Bei niedriger Tem-

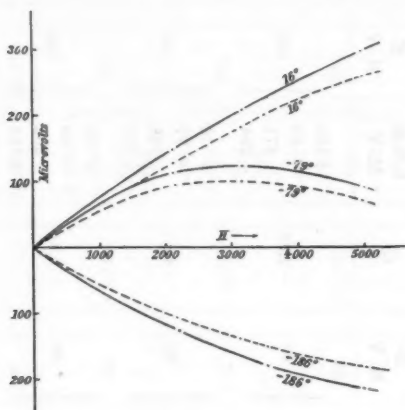


Fig. 5.

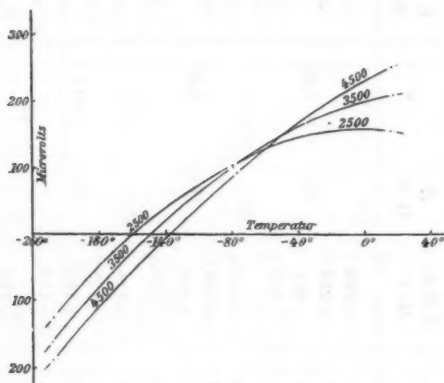


Fig. 6.

peratur ist diese Dissymmetrie ausgeprägter. Sie scheint ein wenig zu variiren, je nachdem wie der Krystall aufgesetzt ist, wie aus Tab. V zu ersehen ist, welche Ablesungen bei verschiedenen Einstellungen der Contacte enthält.

Tabelle V.

Halleffect. Temperatur -186° .

§	I Amp.	Einstellung I		Einstellung II	
		E.M.K.	<i>E</i> M.-V.	E.M.K.	<i>E</i> M.-V.
0	+2	-153	} +100	-141	} +107
+4980	+2	- 53		- 34	
0	+2	-153		-142	
0	-2	+153	} - 99	+142	} -107
+4980	-2	+ 54		+ 36	
0	-2	+153		+144	
0	+2	-153	} -271	-147	} -258
-4980	+2	-430		-409	
0	+2	-166		-156	
0	-2	+166	} +264	+156	} +256
-4980	-2	+430		+409	
0	-2	+160		+151	
Mittel = 183			Mittel = 182		

Tabelle VI.

Halleffect. Temperatur 16° .

§	I Amp.	Einstellung I		Einstellung II	
		E.M.K.	E M.-V.	E.M.K.	E M.-V.
0	+2	- 61	} -256	+ 9	} -237
+4980	+2	-817		-228	
0	+2	- 61		+ 9	
0	-2	+ 58	} +256	- 12	} +241
+4980	-2	+314		+230	
0	-2	+ 58		- 11	
0	+2	- 62	} +261	+ 9	} +271
-4980	+2	+199		+281	
0	+2	- 62		+ 12	
0	-2	+ 52	} -245	- 16	} -253
-4980	-2	-193		-269	
0	-2	+ 52		- 16	
Mittel = 254			Mittel = 250		

Tab. VI zeigt, dass der Mittelwert für die Hall'sche elektromotorische Kraft von dem Umstande, dass die Elektroden g und h nicht genau auf einer äquipotentialen Linie liegen, nicht beeinflusst wird.

§ 4. Die Wärmeleitungsfähigkeit.

Zur Vervollständigung vorliegender Arbeit wäre eine Kenntnis der Wärmeleitungsfähigkeit in beiden Richtungen, sowie von deren Veränderung mit der Temperatur sowohl innerhalb als ausserhalb des Magnetfeldes erforderlich. Hiermit wurde ich vor ein äusserst schwieriges Problem gestellt, da die gewöhnlich zur Bestimmung dieser Leitfähigkeit verwandten Methoden sich nicht auf ein so kleines Versuchsobject wie das, mit dem wir es bei dieser Arbeit zu thun haben, anwenden lassen. Ich habe jedoch versucht, vermittelt die Senarmonts¹⁾ Methode angenäherte Werte für das Verhältnis der Leitfähigkeiten in beiden Richtungen im Magnetfelde und ausserhalb desselben zu erhalten. Der Krystall wurde sorgfältig gereinigt und mit einer dünnen Schicht Elaidinsäure überzogen. Letztere ist von Voigt²⁾ an Stelle der von de Senarmont benutzten Mischung von Wachs und Terpentin empfohlen worden. Auf den Mittelpunkt der Krystallplatte wurde das spitze Ende eines starken 1 m langen Kupferdrahtes aufgedrückt, der in der Mitte vermittelt eines Bunsenbrenners erhitzt wurde. Die Isothermen auf der Platte haben die Form von Ellipsen, und die Quadrate ihrer Axen sind der Leitfähigkeit in der betreffenden Richtung proportional.

Im Magnetfelde gingen die Kraftlinien senkrecht zur Plattenebene. Die Ellipsenaxen wurden mit dem Mikroskop gemessen. Die grössere Axe der Ellipse war in beiden Fällen senkrecht zur Hauptaxe des Krystalles. Das Verhältnis dieser Axen ohne Magnetfeld war $\frac{\perp}{\parallel} = 1,19$ und in einem Magnetfelde von 4980 C.G.S.-Einheiten $\frac{\perp}{\parallel} = 1,34$. Wenn wir die Quadrate dieser Grössen nehmen, finden wir das Verhältnis

1) de Senarmont, Compt. rend. 25. p. 459 u. p. 707. 1847.

2) W. Voigt, Göttinger Nachrichten, Heft 3. 1896.

der Wärmeleitungsfähigkeit für die beiden Richtungen. Die Ergebnisse sind:

$$\text{Nullfeld} \quad \frac{1}{\parallel} 1,42,$$

$$4980 \text{ C.G.S.} \quad \frac{1}{\parallel} 1,80.$$

Die entsprechenden Werte für die elektrische Leitungsfähigkeit sind:

$$\text{Nullfeld} \quad \frac{1}{\parallel} 1,78,$$

$$4980 \text{ C.G.S.} \quad \frac{1}{\parallel} 1,87.$$

§ 5.

Yamaguchi¹⁾ fand, dass das Verhältnis des thermomagnetischen Transversaleffectes zur procentischen Widerstandsänderung im Magnetfelde praktisch von der Feldstärke unabhängig ist, ausgenommen bei gewöhnlicher und höherer Temperatur und für kleinere Feldstärken. Er erhielt folgende Daten für eine elektrolytische Wismutplatte.

Feldstärke	$m : \frac{\Delta w}{w}$			
	-119°	$-30,5^{\circ}$	$+10^{\circ}$	$+62^{\circ}$
1293	—	—	9,8	-29
2650	28	32	19	-6
4120	27	35	32	+6,7
6120	24,5	35	31	+27
8650	24	34	31	—

Fig. 7 giebt die Curven für den thermomagnetischen Transversaleffect für die Temperaturen, bei denen die Beobachtungen angestellt wurden, wieder. Daneben sind eingezeichnet die Curven für die procentische Widerstandsänderung unter dem Einflusse des Magnetfeldes bei diesen Temperaturen. Letztgenannte Curven sind durch Interpolation aus Figg. 2 u. 3 erhalten. Allem Anscheine nach besteht in vorliegendem Falle keine einfache Beziehung zwischen den Erscheinungen, doch

1) E. Yamaguchi, Ann. d. Phys. 1. p. 214. 1900.

ist auch hier die elektromotorische Kraft des Transversaleffectes am grössten in der Richtung \parallel zur kristallographischen Axe, in welcher die durch das Feld erzeugte Widerstandsänderung $\Delta w/w$ am grössten ist. In Fig. 7 sind die Ergebnisse für den Transversaleffect mit \cdot bezeichnet, die für die procentischen Widerstandsänderungen mit \times gegeben. Die

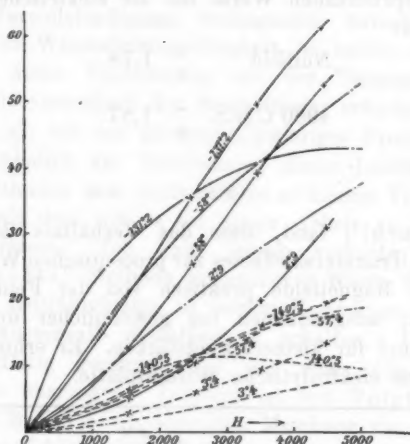


Fig. 7.

ausgezogenen Linien beziehen sich auf den Fall parallel zur Hauptaxe, d. h. für den Transversaleffect, Wärmestrom senkrecht zur Hauptaxe, die punktierten Linien auf den Fall senkrecht zur Hauptaxe, d. h. für den Transversaleffect, Wärmestrom parallel zur Hauptaxe.

Ich möchte zum Schluss Hrn. Prof. Warburg für seine vielfache Unterstützung bei der Durchführung der vorliegenden Arbeit meinen wärmsten Dank ausdrücken.

(Eingegangen 30. Juli 1902.)

**13. Ueber die Bedingungsgleichungen
der aplanatischen Brechung von Strahlenbündeln
in beliebigen krummen Oberflächen;
von Ludwig Matthiessen.**

Die Brechung eines astigmatischen Strahlenbündels mit zwei Brennpunkten in beliebigen krummen Oberflächen ist von Carl Neumann¹⁾ in übersichtlicher Weise formulirt durch folgende Gleichungen:

$$(Ia) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\varrho_1 \varrho_2}{\varrho_2 \cos \varepsilon^2 + \varrho_1 \sin \varepsilon^2} \cdot \frac{\sin e_1 \cos e_2^2}{\sin (e_2 - e_1)} \left[\frac{\cos \vartheta_1^2}{x_0} + \frac{\sin \vartheta_1^2}{\xi_0} \right] \\ + \frac{\varrho_1 \varrho_2}{\varrho_2 \cos \varepsilon^2 + \varrho_1 \sin \varepsilon^2} \cdot \frac{\sin e_2 \cos e_1^2}{\sin (e_2 - e_1)} \left[\frac{\cos \vartheta_2^2}{x_2} + \frac{\sin \vartheta_2^2}{x_1} \right] \end{array} \right\} = 1,$$

$$(IIa) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\varrho_1 \varrho_2}{\varrho_2 \sin \varepsilon^2 + \varrho_1 \cos \varepsilon^2} \cdot \frac{\sin e_1}{\sin (e_2 - e_1)} \left[\frac{\sin \vartheta_1^2}{x_0} + \frac{\cos \vartheta_1^2}{\xi_0} \right] \\ + \frac{\varrho_1 \varrho_2}{\varrho_2 \sin \varepsilon^2 + \varrho_1 \cos \varepsilon^2} \cdot \frac{\sin e_2}{\sin (e_2 - e_1)} \left[\frac{\sin \vartheta_2^2}{x_2} + \frac{\cos \vartheta_2^2}{x_1} \right] \end{array} \right\} = 1,$$

$$(IIIa) \quad \begin{aligned} & \frac{-\varrho_1 \varrho_2 \sin e_1 \cos e_2 \sin 2 \vartheta_1}{(\varrho_1 - \varrho_2) \sin (e_2 - e_1) \sin 2 \varepsilon} \left[\frac{1}{x_0} - \frac{1}{\xi_0} \right] + \\ & \frac{\varrho_1 \varrho_2 \sin e_2 \cos e_1 \sin 2 \vartheta_2}{(\varrho_1 - \varrho_2) \sin (e_2 - e_1) \sin 2 \varepsilon} \left[\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \right] = 1. \end{aligned}$$

Hierin bedeuten ϱ_1 und ϱ_2 die Krümmungsradien des Haupt- und Nebennormalschnittes des Incidenzpunktes, ε das Azimut der Einfallsebene gegen den Hauptnormalschnitt, e_2 und e_1 den Einfallswinkel und Brechungswinkel des Axenstrahles, x_0 und ξ_0 die Abscissen der Brennpunkte b_1 und b_2 des einfallenden, x_2 und x_1 die Abscissen der Brennpunkte a_1 und a_2 des gebrochenen Strahles, ferner ϑ_1 und ϑ_2 die Azimute der Focalebene Σb_1 und Σa_1 , $90^\circ + \vartheta_1$ und $90^\circ + \vartheta_2$ die Azimute der Focalebene Σb_2 und Σa_2 gegen die Einfallsebene.

1) C. Neumann, Ber. d. k. sächs. Gesellsch. d. Wissensch., math.-phys. Kl. p. 53. 1880; L. Matthiessen, Schömilch's Zeitschr. f. Mathem. u. Phys. 33. p. 167. 1888; L. Gartenschläger, Inaug.-Diss. p. 10 ff. Rostock 1888.

Es ist nun von Interesse, die Bedingungen aufzusuchen, unter welchen die Brechung eines homocentrischen Strahlenbündels in einer beliebigen Fläche ebenfalls eine homocentrische oder aplanatische wird.

Wenn das einfallende Strahlenbündel homocentrisch, also $\xi_0 = x_0$ ist, so werden die Formeln folgende:

$$(Ib) \quad \left\{ \frac{\varrho_1 \varrho_2 \sin e_1}{(\varrho_2 \cos e^2 + \varrho_1 \sin e^2) \sin (e_2 - e_1)} \left\{ -\frac{\cos e_2^2}{x_0} + \frac{\sin e_2}{\sin e_1} \cos e_1^2 \times \right. \right. \\ \left. \left. \left(\frac{\cos \vartheta_2^2}{x_2} + \frac{\sin \vartheta_2^2}{x_1} \right) \right\} = 1, \right.$$

$$(IIb) \quad \left\{ \frac{\varrho_1 \varrho_2 \sin e_1}{(\varrho_2 \sin e^2 + \varrho_1 \cos e^2) \sin (e_2 - e_1)} \left\{ -\frac{1}{x_0} + \frac{\sin e_2}{\sin e_1} \times \right. \right. \\ \left. \left. \left(\frac{\sin \vartheta_2^2}{x_2} + \frac{\cos \vartheta_2^2}{x_1} \right) \right\} = 1, \right.$$

$$(IIIb) \quad \frac{\varrho_1 \varrho_2 \sin e_1}{(\varrho_1 - \varrho_2) \sin (e_2 - e_1)} \cdot \frac{\sin e_2}{\sin e_1} \cdot \frac{\cos e_1 \sin 2 \vartheta_2}{\sin 2 e} \left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \right) = 1.$$

Diese Formeln vereinfachen sich, wenn das Azimut $\varepsilon = 0$ ist, also die Einfallsebene im Hauptnormalschnitte liegt, in

$$(Ic) \quad \frac{\varrho_1 \sin e_1}{\sin (e_2 - e_1)} \left\{ -\frac{\cos e_2^2}{x_0} + \frac{\sin e_2 \cos e_1^2}{\sin e_1} \left(\frac{\cos \vartheta_2^2}{x_2} + \frac{\sin \vartheta_2^2}{x_1} \right) \right\} = 1,$$

$$(IIc) \quad \frac{\varrho_2 \sin e_1}{\sin (e_2 - e_1)} \left\{ -\frac{1}{x_0} + \frac{\sin e_2}{\sin e_1} \left(\frac{\sin \vartheta_2^2}{x_2} + \frac{\cos \vartheta_2^2}{x_1} \right) \right\} = 1.$$

Die Gleichung (IIIc) mit $\sin 2 \varepsilon = 0$ multiplicirt, verschwindet identisch mit $\vartheta_2 = 90^\circ$, d. h. die erste Brennpunktlinie a_1 liegt senkrecht zur Einfallsebene, die Gleichungen (Ic) und (IIc) werden die Formeln von Reusch, nämlich:

$$(Ic) \quad \frac{-\varrho_1 \sin e_1}{\sin (e_2 - e_1)} \cdot \frac{\cos e_2^2}{x_0} + \frac{\varrho_1 \sin e_2}{\sin (e_2 - e_1)} \cdot \frac{\cos e_1^2}{x_1} = 1,$$

$$(IIc) \quad \frac{-\varrho_2 \sin e_1}{\sin (e_2 - e_1)} \cdot \frac{1}{x_0} + \frac{\varrho_2 \sin e_2}{\sin (e_2 - e_1)} \cdot \frac{1}{x_2} = 1.$$

Wenn ferner für $\varepsilon = 0$ die Fläche eine Rotationsfläche ist und N die Normale des Incidenzpunktes, so wird $\varrho_2 = N$ und

$$(Id) \quad \frac{-\varrho_1 \sin e_1}{\sin (e_2 - e_1)} \cdot \frac{\cos e_2^2}{x_0} + \frac{\varrho_1 \sin e_2}{\sin (e_2 - e_1)} \cdot \frac{\cos e_1^2}{x_1} = 1,$$

$$(IIId) \quad \frac{-N \sin e_1}{\sin (e_2 - e_1)} \cdot \frac{1}{x_0} + \frac{N \sin e_2}{\sin (e_2 - e_1)} \cdot \frac{1}{x_2} = 1.$$

Ist das Azimut $s = 90^\circ$, d. h. liegt die Einfallsebene senkrecht zum Hauptnormalschnitt, so hat man nur in (Ic) und (IIc) die Krümmungsradien ϱ_1 und ϱ_2 zu vertauschen.

Wenn weiter an die Stelle der Brechung die *Spiegelung* tritt, also $e_1 = -e_2$ wird, so gehen die allgemeinen Formeln (Ib) bis (IIIb) über in

$$(Ie) \quad \frac{\varrho_1 \varrho_2}{\varrho_2 \cos e^2 + \varrho_1 \sin e^2} \left\{ \frac{\cos e_1}{2 x_0} + \frac{\cos e_2}{2} \left(\frac{\cos \vartheta_2^2}{x_2} + \frac{\sin \vartheta_2^2}{x_1} \right) \right\} = 1,$$

$$(IIe) \quad \frac{\varrho_1 \varrho_2}{\varrho_2 \sin e^2 + \varrho_1 \cos e^2} \left\{ \frac{1}{2 x_0 \cos e_2} + \frac{1}{2 \cos e_2} \left(\frac{\sin \vartheta_2^2}{x_2} + \frac{\cos \vartheta_2^2}{x_1} \right) \right\} = 1,$$

$$(IIIe) \quad \frac{-\varrho_1 \varrho_2}{2(\varrho_1 - \varrho_2)} \cdot \frac{\cos e_1 \sin 2 \vartheta_2}{\cos e_2 \sin 2 s} \left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \right) = 1.$$

Für $s = 0^\circ$ wird $\vartheta_2 = 90^\circ$ und die Gleichung (IIIe) verschwindet identisch; die beiden anderen Formeln reduciren sich auf

$$(If) \quad \frac{\varrho_1 \cos e_2}{2} \left(\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_1} \right) = 1,$$

$$(IIIf) \quad \frac{\varrho_2}{2 \cos e_2} \left(\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_2} \right) = 1.$$

Wenn das gespiegelte Object die Himmelskugel ist, so ist $x_0 = \infty$, und es sind die Gleichungen der beiden Bildflächen

$$x_1 = \frac{\varrho_1 \cos e_2}{2}, \quad x_2 = \frac{\varrho_2}{2 \cos e_2}.$$

Wir wollen jetzt die Fälle untersuchen, in denen zunächst die Brechung eine *aplanatische*, also $x_1 = x_2$ wird. Bei endlichen Azimuten s erhält man statt der Gleichungen (Ib) und (IIb):

$$(Ig) \quad \frac{\varrho_1 \varrho_2 \sin e_1}{(\varrho_2 \cos s^2 + \varrho_1 \sin s^2) \sin(e_2 - e_1)} \left\{ -\frac{\cos e_2^2}{x_0} + \frac{\sin e_2 \cos e_1^2}{\sin e_1} \cdot \frac{1}{x_2} \right\} = 1,$$

$$(IIg) \quad \frac{\varrho_1 \varrho_2 \sin e_1}{(\varrho_2 \sin s^2 + \varrho_1 \cos s^2) \sin(e_2 - e_1)} \left\{ -\frac{1}{x_0} + \frac{\sin e_2}{\sin e_1} \cdot \frac{1}{x_2} \right\} = 1.$$

In (IIb) wird der Factor $1/x_2 - 1/x_1 = 0$, erfordert also die Relation $\sin 2s = 0$, $s = 0^\circ$ oder 90° , d. h. aplanatische Brechung bez. Spiegelung ((Ie) bis (IIIe)) kann nur eintreten, wenn die Einfallsebene mit einem der beiden Hauptnormal-

schnitte der brechenden Fläche coincidirt. Hierdurch gehen die Gleichungen (I g) und (II g) über in

$$(I h) \quad \frac{-\varrho_1 \sin e_1}{\sin(e_2 - e_1)} \cdot \frac{\cos e_2^2}{x_0} + \frac{\varrho_1 \sin e_2}{\sin(e_2 - e_1)} \cdot \frac{\cos e_1^2}{x_2} = 1,$$

$$(II h) \quad \frac{-\varrho_2 \sin e_1}{\sin(e_2 - e_1)} \cdot \frac{1}{x_0} + \frac{\varrho_2 \sin e_2}{\sin(e_2 - e_1)} \cdot \frac{1}{x_2} = 1.$$

Ueber die Werte von ϱ_1 und ϱ_2 ist wie zu Anfang vorausgesetzt, dass ϱ_1 dem Flächennormalschnitte der Einfallsebene mit dem Azimute $\varepsilon = 0^\circ$ angehört. Die beiden vorstehenden Formeln enthalten drei Variabele x_0 , x_2 und e_2 . Sie können demnach für jeden Einfallswinkel e_2 bestehen, wobei e_2 auf beiden Seiten der Normale zwei gleiche und dem Vorzeichen nach entgegengesetzte Werte hat, welche aber in der Formel nichts ändern. Man erhält nun aus beiden Gleichungen die simultanen Werte von x_0 und x_2 für einen und denselben Einfallswinkel, nämlich

$$(I i) \quad x_0 (\varrho_2 - \varrho_1 \cos e_1^2) = \sin e_1 \sin(e_2 + e_1) \varrho_1 \varrho_2,$$

$$(II i) \quad x_2 (\varrho_2 - \varrho_1 \cos e_2^2) = \sin e_2 \sin(e_2 + e_1) \varrho_1 \varrho_2,$$

$$(III i) \quad x_2 : x_0 = \frac{\varrho_2 - \varrho_1 \cos e_1^2}{\sin e_1} : \frac{\varrho_2 - \varrho_1 \cos e_2^2}{\sin e_2}.$$

Dieses sind die gesuchten Bedingungsgleichungen der aplanatischen Brechung von unendlich dünnen Strahlenbündeln in beliebigen krummen Oberflächen.

Für die Kugel ist $\varrho_2 = \varrho_1 = r$, und folgeweise

$$x_0 = r \sin(e_2 + e_1) : \sin e_1, \quad x_2 = r \sin(e_2 + e_1) : \sin e_2,$$

$$x_2 : x_0 = \sin e_1 : \sin e_2, \quad x_0 = n x_2.$$

Letzteres war schon früher bekannt und zwar, dass die beiden conjugirten aplanatischen Flächen zwei mit der brechenden Kugel concentrische Kugeln seien (Weierstrass, Reusch).

Im allgemeinen giebt es also in den beiden Hauptnormal-schnitten jedes Flächenpunktes eine unendliche Schaar von einfallenden Strahlen, welche für bestimmte x_0 homocentrisch gebrochen werden. Für verschiedene Werte von ϱ_1 und ϱ_2 die conjugirten Flächen zu finden, erfordert eine besondere Untersuchung.

Beachtenswert ist der Fall aplanatischer Spiegelung, also $e_1 = -e_2$. Die Formel (III i) geht dann über in

$$x_0(\varrho_2 - \varrho_1 \cos e_2^2) = x_2(\varrho_2 - \varrho_1 \cos e_2^2) = 0.$$

Daraus folgt

$$\varrho_2 - \varrho_1 \cos e_2^2 = 0, \quad \cos e_2 = \sqrt{\varrho_2 : \varrho_1}.$$

Für ein willkürliches x_0 wird dann gemäss (I h) und (II h):

$$x_2 = \frac{x_0 \varrho_1 \cos e_2}{2 x_0 - \varrho_1 \cos e_2} = \frac{x_0 \sqrt{\varrho_1 \varrho_2}}{2 x_0 - \sqrt{\varrho_1 \varrho_2}},$$

für ein willkürliches x_2

$$x_0 = \frac{x_2 \sqrt{\varrho_1 \varrho_2}}{2 x_2 - \sqrt{\varrho_1 \varrho_2}}.$$

Wenn im speciellen Falle dabei $x_0 = \infty$ ist (Himmelskugel), so ist die Bilddistanz $x_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\varrho_1 \varrho_2}$, und für $x_2 = \infty$ die Objectdistanz $x_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\varrho_1 \varrho_2}$. Wenn die Fläche der Spiegelung die Rotationsfläche eines Kegelschnittes um seine Axe ist, z. B. ein gleichseitiges Hyperboloid, so ist

$$\varrho_2 = N, \quad \varrho_1 = N^3 : a^2, \quad \cos e_2 = a : N.$$

Die Object- und Bilddistanzen sind in diesem Falle

$$x_0 = \frac{x_2 N^2}{2 a x_2 - N^2}, \quad x_2 = \frac{x_0 N^2}{2 a x_0 - N^2}.$$

Kehren wir noch einmal zu dem allgemeinen Falle der homocentrischen Brechung zurück, und setzen eine Rotationsfläche voraus, so ist selbstverständlich auch die Brechung an der gegenüber liegenden Seite nach dem Austritte des Strahlenbündels aplanatisch, falls den Gleichungen (I i) und (II i) genügt wird, besonders beim symmetrischen Durchgange.

Wenn ferner die brechende Fläche eine Ebene ist, also $\varrho_2 = \varrho_1 = \infty$, so gehen die Formeln (I h) und (II h) über in

$$(I k) \quad x_2 \sin e_1 \cos e_2^2 = x_0 \sin e_2 \cos e_1^2,$$

$$(II k) \quad x_2 \sin e_1 = x_0 \sin e_2.$$

Diesen Gleichungen geschieht nur Genüge durch $\cos e_2^2 = \cos e_1^2$, also $e_2 = e_1 = 0$.

Bei der Brechung in einer Ebene findet demnach nur Aplanatismus statt bei senkrechter Incidenz.¹⁾ Bei Spiegelung,

1) L. Matthiessen, Ann. d. Phys. 4. p. 347. 1901.

also $e_1 = -e_2$, findet immer Aplanatismus statt für beliebige Werte von x_0 ; auch ist $x_2 = x_0$.

Von besonderem Interesse sind die bisher erörterten dioptrischen Eigenschaften bei den Rotationsflächen zweiter Ordnung, welche durch Rotation von Kegelschnitten um ihre Axe gebildet sind. Die Gleichungen (Ii) und (IIi) nehmen dann folgende Formen an:

a) für die *Brechung*:

$$(Ii) \quad x_0(N - \rho_1 \cos e_1^2) = \sin e_1 \sin(e_2 + e_1) \rho_1 N,$$

$$(IIi) \quad x_2(N - \rho_1 \cos e_2^2) = \sin e_2 \sin(e_2 + e_1) \rho_1 N;$$

b) für die *Spiegelung*:

$$x_0(N - \rho_1 \cos e_1^2) = 0, \quad x_2(N - \rho_1 \cos e_2^2) = 0.$$

Es ist nun eine Eigentümlichkeit der genannten Flächen, dass, wenn e_1 den Winkel bedeutet, welchen die Normale N mit dem rad. vect. r bildet, die Beziehung stattfindet:

$$N - \rho_1 \cos e_1^2 = 0 \text{ (Newton).}$$

Um dies zu beweisen, gehen wir aus von der allgemeinen Polargleichung der Kegelschnitte

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{r} = \frac{e}{p} \cos \vartheta + \frac{1}{p}.$$

Die Differentiirung ergiebt

$$\frac{\partial r}{\partial \vartheta} = \frac{r^2 e}{p} \sin \vartheta,$$

und die Logarithmirung

$$\log \frac{\partial r}{\partial \vartheta} - 2 \log r - \log \sin \vartheta - \log \frac{e}{p} = 0.$$

Differentiiren wir abermals, so resultirt

$$\frac{\partial^2 r}{\partial \vartheta^2} - \frac{2}{r} \left(\frac{\partial r}{\partial \vartheta} \right)^2 - \cos \vartheta \frac{\partial r}{\partial \vartheta} = 0.$$

Nun ist die Normale

$$N = \frac{r \sin \vartheta}{\sin(\vartheta - e_1)} = \frac{r \sin \vartheta}{\sin \vartheta \cos e_1 - \cos \vartheta \sin e_1}$$

und weiter

$$\operatorname{tg} e_1 = \frac{\partial r}{r \partial \vartheta},$$

woraus folgt

$$\cos e_1 = \frac{r \partial \vartheta}{\sqrt{\partial r^2 + r^2 \partial \vartheta^2}}, \quad \sin e_1 = \frac{\partial r}{\sqrt{\partial r^2 + r^2 \partial \vartheta^2}}.$$

Der Wert der Normale verwandelt sich dadurch in

$$N = \frac{r \sqrt{\partial r^2 + r^2 \partial \vartheta^2}}{r \partial \vartheta - \cotg \vartheta \partial r}.$$

Ferner ist in Berücksichtigung der Differentialgleichung des Kegelschnittes

$$\varrho_1 = \frac{(\partial r^2 + r^2 \partial \vartheta^2)^{3/2} : r \partial \vartheta^2}{\frac{2 \partial r^2}{r \partial \vartheta^2} - \frac{\partial^2 r}{\partial \vartheta^2} + r} = \frac{N (\partial r^2 + r^2 \partial \vartheta^2)}{r^2 \partial \vartheta^2},$$

folglich

$$N = \varrho_1 \cos e_1^2.$$

Da nun die Gleichung (I1) für alle von Null verschiedenen Werte von e_2 den Wert $x_0 = \infty$ verlangt, so ergibt sich daraus folgendes Theorem:

Wenn bei einer beliebigen Rotationsfläche zweiter Ordnung ein gebrochenes Strahlenbündel eines sehr entfernten leuchtenden Punktes durch einen Focus geht, so ist die Brechung aplanatisch.

Dieser Satz ist von Bedeutung für die Refraction peripherischer Strahlen in der ellipsoidischen Hornhaut des menschlichen Auges.¹⁾

Es lässt sich nun auch, wie Detels²⁾ gezeigt hat, in umgekehrter Reihenfolge das folgende Theorem beweisen.

Wenn die Strahlenbündel sehr entfernter leuchtender Punkte nach ihrer homocentrischen Spiegelung oder Brechung in einer Rotationsfläche durch einen festen Punkt gehen, so ist die Fläche von der zweiten Ordnung und der feste Punkt ein Focus.

Um diesen Satz zu beweisen, möge bezüglich des noch unbestimmten Convergenzpunktes aller gebrochenen oder gespiegelten Strahlen und einer beliebigen durch ihn gelegten Axe, $f(r, \vartheta) = 0$ die Gleichung der Axenschnittcurve einer der Flächen von der vorausgesetzten Eigenschaft sein. Es ist die Function $f(r, \vartheta)$ zu bestimmen aus der Eigenschaft, dass der Brechungswinkel e_1 , welcher sich für einen beliebigen Curvenpunkt aus der Gleichung $N = \varrho_1 \cos e_1^2$ ergibt, auch der Winkel zwischen der Normale und dem rad. vect. r ist. N , ϱ_1 und $\cos e_1$ lassen sich durch r , ϑ und ihre Differentiale ausdrücken.

1) L. Matthiessen, Arch. f. d. ges. Physiol. 91. p. 1. 1902.

2) Fr. Detels, Inaug.-Diss. Rostock 1887.

Man hat

$$\operatorname{tg} e_1 = \frac{\partial r}{r \partial \vartheta},$$

folglich

$$\cos e_1 = \frac{r \partial \vartheta}{\sqrt{\partial r^2 + r^2 \partial \vartheta^2}}, \quad \sin e_1 = \frac{\partial r}{\sqrt{\partial r^2 + r^2 \partial \vartheta^2}},$$

$$N = \frac{r \sqrt{\partial r^2 + r^2 \partial \vartheta^2}}{r \partial \vartheta - \cotg \vartheta \partial r}, \quad \rho_1 = \frac{(\partial r^2 + r^2 \partial \vartheta^2)^{3/2}}{r \partial \vartheta \left(\frac{2 \partial r^2}{r \partial \vartheta^2} - \frac{\partial^2 r}{\partial \vartheta^2} + r \right)}.$$

Setzen wir diese Werte in die Newton'sche Gleichung ein, so ergibt sich

$$\frac{\partial^2 r}{\partial \vartheta^2} - \frac{2}{r} \cdot \left(\frac{\partial r}{\partial \vartheta} \right)^2 - \cos \vartheta \cdot \frac{\partial r}{\partial \vartheta} = 0.$$

Die Integration dieser Gleichung führt zur Axenschnittcurve der gesuchten Fläche. Man bringt sie auf die Form

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial r}{\partial \vartheta} \right)}{\frac{\partial r}{\partial \vartheta}} - 2 \frac{\partial r}{r} - \cotg \vartheta \partial \vartheta = 0.$$

Durch Integration erhält man, wenn $\log C_1$ eine willkürliche Constante bezeichnet,

$$\log \frac{\partial r}{\partial \vartheta} - 2 \log r - \log \sin \vartheta - \log C_1 = 0,$$

oder

$$\frac{\partial r}{r^2} = C_1 \sin \vartheta \partial \vartheta.$$

Eine abermalige Integration ergibt, wenn C_2 eine andere Constante bedeutet,

$$\frac{1}{r} = C_1 \cos \vartheta + C_2,$$

oder

$$r = \frac{\frac{1}{C_2}}{1 + \frac{C_1}{C_2} \cos \vartheta} = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta}.$$

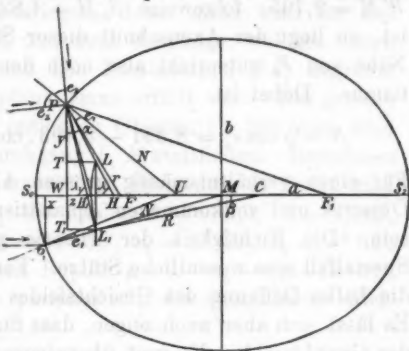
Diese Gleichung ist die allgemeine Polargleichung der Kegelschnitte. Der Pol ist der verlangte Convergenzpunkt sämtlicher Strahlen und die Axe des Polarcoordinatensystems ist die grosse Axe der Kegelschnitte.

Die oben bewiesenen Theoreme lassen eine interessante Anwendung auf die Theorie der Refraction in der ellipsoidi-

schen Hornhaut des menschlichen Auges bei Periskopie zu. Die Constitution der Hornhaut und die Lage der Pupille und der Linse bringen es mit sich, dass die meisten peripherischen Strahlen im seitlichen Gesichtsfelde nahezu durch die vordere Hälfte der Linsenaxe, also annähernd durch einen festen Punkt gehen, und dass der erste Focus des Hornhautellipsoides in der vorderen Hälfte der Linsenaxe liegt. Zugleich wird auch die Voraussetzung, dass das betrachtete Object verhältnismässig weit von der brechenden Fläche entfernt sei, durch die Thatsache erfüllt, dass bei einem normalen Auge dieser Abstand zwischen 150 mm und ∞ schwankt, während der Krümmungsradius der Hornhaut nur zwischen 7,8 und 9,5 mm auf ihrer ganzen Fläche schwankt. Um die Ideen zu fixiren, möge für die äussersten Grenzen des Gesichtsfeldes der Gang der Lichtstrahlen berechnet werden, welche noch durch die Pupille ins Auge zu gelangen vermögen. Wir gehen aus von den Krümmungsverhältnissen einer normalen ellipsoidischen Hornhaut, welche von Knapp gemessen sind.

ρ_0	a	b	d_1	f	$d_1 + d_2$	n	r
7,81	11,01	9,27	3,6	5,07	7,2	1,3365	10 mm

Hier bedeutet ρ_0 den Krümmungsradius des Hornhautscheitels, a und b die Halbaxen, d_1 den Ort des vorderen Linsenscheitels, $d_1 + d_2$ den des hinteren, f die Focaldistanz, n den Brechungsindex der Hornhaut, r den Krümmungsradius der vorderen Linsenfläche. Bezeichnen ausserdem x und y die rechtwinkligen Coordinaten der Hornhaut, so ist von Allvar Gullstrand für die äusserste noch messbare Grenze der Spiegelung und Durchsichtigkeit der Hornhaut $y = 5,4$ mm gefunden. Als Oeffnung der Pupille möge 4 mm angenommen werden. Zur Erläuterung der Berechnung diene die Figur,



welche einen Axenschnitt der Hornhaut in zweieinhalbfacher Vergrößerung darstellt.

Die Normale des Incidenzpunktes P sei N , PF der rect. vect., C der Krümmungsmittelpunkt der vorderen Linsenfläche, $R = 10$ mm ihr Krümmungsradius, $WS_1 = z$, $HPU = e_1$ der Brechungswinkel, e_2 der Einfallswinkel, $WPH = \alpha$, $WHP = \lambda$ und die halbe Oeffnung des lateralen Gesichtsfeldes $\mu = \lambda + e_2 - e_1$.

Wir berechnen die Durchgänge

- a) PLH für den oberen Rand der Pupille,
- b) PS_1 für den Scheitel der Linse,
- c) PH_1L_1 für den unteren Rand der Pupille.

Wir werden weiter unten finden, dass für die angenommene Grenze sämtliche Lichtstrahlen von P aus die ganze Pupille treffen, also auch in das Innere des Auges gelangen.

a) *Durchgang des peripherischen Strahles PLH am oberen Rande der Pupille.* Die Abscisse x des Punktes P ist gleich 2,059 mm, also $z = d_1 - 2,059 = 1,541$; die Abscisse des Punktes L von S_1 abgerechnet, ergibt sich aus $\eta^2 = 2R\xi$, worin $\eta = 2$ mm, $R = 10$ mm zu setzen ist, also $\xi = 0,2$ mm. Ferner ist $\rho = 9,493$, $N = 8,331$, $PT = 3,4$ und $TL = 1,741$. Daraus findet man $\alpha = 27^\circ 7'$, $e_1 = 22^\circ 29'$, $e_2 = 30^\circ 44'$, $WH = 2,765$; folgeweise $S_0H = 4,824$. Da $S_0F = f = 5,07$ ist, so liegt der Axenschnitt dieser Strahlen in unmittelbarer Nähe von F , entspricht also noch der Bedingung des Aplanatismus. Dabei ist

$$N - \rho \cos e_1^2 = 8,331 - 9,493 \cdot \cos 22^\circ 29'^2 = 0,226.$$

Für einen verhältnismässig grossen Abstand des betrachteten Objectes und vollkommenen Aplanatismus müsste $e_1 = 20^\circ 29'$ sein. Die Richtigkeit der Theorie gewinnt also in diesem Specialfall eine wesentliche Stütze. Ferner ist $\lambda = 62^\circ 53'$ und die halbe Oeffnung des Gesichtsfeldes $\mu = \lambda + e_2 - e_1 = 71^\circ 8'$. Es lässt sich aber auch zeigen, dass für diese äusserste Grenze des Gesichtsfeldes die weit überwiegende Strahlenmenge durch den äussersten Teil der Pupille und durch die vordere Hälfte der Linsenaxe in der Nähe des Focus geht. Zu dem Zwecke untersuchen wir weiter

b) den Durchgang des Scheitelstrahles PS_1 . Hier ist $PW = 5,4$, $WS_1 = 1,541$. Daraus findet man $\alpha = 15^\circ 56'$, $e_1 = 33^\circ 40'$, $e_2 = 47^\circ 47'$, $\lambda = 74^\circ 4'$, $\mu = 88^\circ 11'$;

c) den Durchgang PL_1 am unteren Rande der Pupille. Hier ist $PT_1 = 7,4$, $T_1L_1 = 1,741$. Daraus findet man $\alpha = 13^\circ 14'$, $e_1 = 36^\circ 22'$, $e_2 = 52^\circ 24'$, $WH_1 = 1,270$, $S_0H_1 = 3,329$; $\lambda = 76^\circ 46'$, $\mu = 92^\circ 48'$. Demnach beträgt das halbe (laterale) Gesichtsfeld $92^\circ 48'$, was mit den Beobachtungen übereinstimmt. Da der Winkel $\beta = 11^\circ 30'$, $\lambda_1 = 76^\circ 46'$ ist, so ist der Winkel $CL_1H_1 = 88^\circ 16'$, also nahe 90° ; mithin gelangen sämtliche Strahlen, die von P aus die Pupille L_1 bestreichen, noch ins Auge.

Vergleichen wir die Breite der beiden Strahlenfächer, welche die obere und die untere Pupillenhälfte treffen, so ist $S_1H = 1,224$, dagegen S_1H_1 nur $0,271$, also das Verhältnis der Fächerbreiten etwa $4,5$; und betrachten wir den ganzen Strahlenkegel, welcher die Pupille trifft, so bleibt das Verhältnis dasselbe.

Endlich ergibt sich aus der aplanatischen Gleichung $N - \rho \cos e_1^2 = 0$, dass es immer zwei symmetrisch zur Normale gelegene Strahlen giebt, von denen der äussere nach dem ersten Focus, der innere durch den zweiten Focus geht. Das Ellipsoid hat also zwei aplanatische Centra des Durchganges. Je dichter die Brennpunkte zusammenliegen, desto mehr wird für das peripherische Gesichtsfeld, und zwar dasjenige, welches durch die Ränder der Pupille und den Focalabstand FF_1 begrenzt ist, die Bedingung des Aplanatismus erfüllt sein. Der grösste Astigmatismus für weit entlegene Objecte (> 200 mm) wird wahrscheinlich für den Durchgang L_1M stattfinden. Berechnen wir für denselben die numerischen Elemente, so findet man für den Pupillenrand L_1 die Ordinate $y = 2,9$, $N = 7,960$, $\rho = 8,281$, $\lambda = 15^\circ 30'$, $\alpha = 74^\circ 30'$, $e_1 = 5^\circ 52'$, $e_2 = 7^\circ 51'$, das Gesichtsfeld der halben Pupille $\mu = \lambda - (e_2 - e_1) = 13^\circ 31'$. Dies ist also immer noch peripherisch; die aplanatische Gleichung würde sein

$$x_0(7,960 - 8,281 \cos 5^\circ 52'^2) = \sin 5^\circ 52' \sin 13^\circ 43' \cdot 7,960 \cdot 8,281.$$

Daraus würde sich ergeben

$$7,960 - 8,281 \cos 5^\circ 52'^2 = -0,234, \quad x_0 = -7,0 \text{ mm.}$$

Für die grössere Objectweite $-200 \text{ mm} = x_0$ würde $e_1 = 10^\circ 50'$ betragen müssen, um ein Centralstrahlenbündel PM aplanatisch zu machen.

Aus allem diesen geht hervor, dass die ellipsoidische Gestalt der Hornhaut des menschlichen Auges für die Periskopie ausserordentlich günstige dioptrische Eigenschaften besitzt.

Es möge zu den Dimensionen des Ellipsoides noch bemerkt werden, dass die grosse Axe $2a = 22,02 \text{ mm}$ nahezu mit dem Orte der Retina $S_0 R = 23,3 \text{ mm}$ übereinstimmt.

(Eingegangen 5. August 1902.)

14. Ueber die chemischen Wirkungen der Canalstrahlen; von G. C. Schmidt.

In einer vor kurzem erschienenen Arbeit¹⁾ habe ich nachgewiesen, dass die Kathodenstrahlen stark reducirende Eigenschaften besitzen. So wurden durch dieselben Eisenchlorid in Eisenchlorür, Quecksilberchlorid in Quecksilberchlorür, Natriumchlorid in Natriumsubchlorid etc. verwandelt. Ich erklärte diese Thatsachen indem ich annahm, dass ein negatives Elektron der Kathodenstrahlen eine positive Valenzladung des Metalles im Salze sättigt, und dass dieses dadurch in einen minderwertigen Zustand übergeht. Das Metall vermag dann nicht mehr so viele Atome des Halogens zu binden, das eine entweicht, verbindet sich mit einem anderen positiv geladenen Elektron oder vereinigt sich auf eine andere Weise zu einem indifferenten Halogenmolecul. Es bleibt somit eine Verbindung zurück, die im Vergleiche zum Ausgangsmaterial weniger Halogen enthält, also reducirt ist.

Da die Canalstrahlen nach den Untersuchungen von Hrn. W. Wien²⁾ eine positive Ladung, also eine den Kathodenstrahlen entgegengesetzte, mit sich führen, so schien es nicht ausgeschlossen, dass dieselben auch in chemischer Hinsicht sich den Kathodenstrahlen entgegengesetzt verhalten und *oxydirend* wirken würden. Diese Annahme hat sich nicht bestätigt, vielmehr wirken die Canalstrahlen zunächst nur zersetzend; ob darauf eine Oxydation oder Reduction erfolgt, hängt im wesentlichen von dem Gasinhalt und der vorliegenden Verbindung ab.

Ueber die chemischen Wirkungen der Canalstrahlen liegen nur vereinzelte Beobachtungen vor. Nach Hrn. W. Arnold³⁾

1) G. C. Schmidt, Ann. d. Phys. 7. p. 321. 1902.

2) W. Wien, Wied. Ann. 65. p. 446. 1898.

3) W. Arnold, Diss. Erlangen 1897; Wied. Ann. 61. p. 326. 1897.

werden alle Natriumsalze zersetzt, wobei deutlich die *D*-Linie auftritt. Nach Hrn. A. Wehnelt¹⁾ oxydirt sich eine in den Gang der Canalstrahlen gebrachte, polirte Kupferplatte nach kurzer Zeit. Hr. W. Wien²⁾ hat beobachtet, dass die Fluorescenzerregung der Canalstrahlen beim Auftreffen auf gewöhnliches Röhrenglas von dem Gasinhalt im Entladungsrohr abhängt. Dabei zeigte sich, dass die Canalstrahlen sehr verschieden elektrostatisch und magnetisch ablenkbar waren und dass die ablenkbaren unter Umständen andere Fluorescenz-

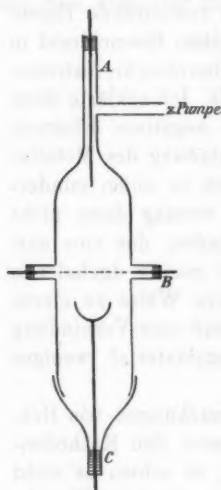


Fig. 1.

wirkungen zeigen als die weniger ablenkbaren. Ferner fand Hr. Wien wie schon Arnold³⁾, dass die Leuchterscheinungen unter den Canalstrahlen sehr schnell nachliessen. Alle diese That-sachen deuten darauf hin, dass die Canalstrahlen kräftige chemische Wirkungen auszuüben im stande sind.

Methode. Zur Erzeugung der Canalstrahlen wurde ein ca. 30 cm langes Rohr mit einem Schliff von der in der Fig. 1 wiedergegebenen Form benutzt. Seitwärts waren zwei Glasröhren angeblasen, durch welche die zur Befestigung der bei B angebrachten Aluminiumkathode dienenden Kupferdrähte führten. Die Kathode bestand aus einem Aluminiumblech, welches die Röhre vollständig ausfüllte und in das eine grosse Anzahl von

Löchern gestanzt waren, durch welche die Canalstrahlen hindurchgingen. Unten bei C war ein Drahtgeflecht eingekittet, welches das Gefäss mit der zu untersuchenden Substanz aufnahm. Sowohl die Kathode, als auch das Drahtgeflecht wurden zur Erde abgeleitet. Die Anode bestand aus einem Aluminiumdraht. Als Elektrizitätsquelle diente eine 20plattige Toepler'sche Influenzmaschine.

1) A. Wehnelt, Wied. Ann. 67. p. 425. 1899.

2) W. Wien, Ann. d. Phys. 8. p. 244. 1902.

3) l. c.

Einige Versuche wurden mit einem etwas abweichend geformten Rohr angestellt. Zwei Röhren von 6 cm Länge und 4 cm Durchmesser, welche an beiden Seiten umgebogen waren, wurden mit Siegellack zusammengekittet, nachdem ein Drahtnetz zwischen beiden gebracht war. Die Endplatten bestanden aus Zink. Da bei diesem Entladungsrrohr die Kathoden- und Canalstrahlen stets mit dem Siegellack in Berührung kamen, so wurde der Gasinhalt schnell verändert, weswegen die meisten Versuche mit dem ersten Rohr angestellt wurden.

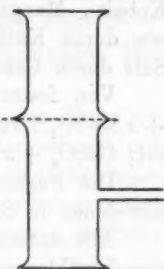


Fig. 2.

Wasserstoff und Sauerstoff wurden elektrolytisch gewonnen und durch Hindurchleiten durch concentrirte Schwefelsäure, und Streichenlassen über Aetzkali und Phosphorpentoxyd getrocknet.

Die benutzten Salze waren äusserst rein; ihre Darstellung und Reinigung wird bei den einzelnen Salzen mitgeteilt werden.

Luminescenzerscheinungen. Wie schon Hr. W. Arnold¹⁾ fand, leuchten alle Natriumsalze rotgelb, in dem Licht tritt hell die *D*-Linie auf; das Leuchten wird allmählich schwächer, ohne dass eine Färbung des Salzes auftritt. Ich kann diese Angaben durchaus bestätigen. Das von mir benutzte äusserst reine Salz war aus NaCl purissimum gewonnen worden. Dasselbe wurde in destillirtem Wasser gelöst und nach Zusatz von ein paar Tropfen Salzsäure durch frisch überdestillirten Alkohol gefällt. Nachdem es mehrere Male auf dem Filter mit Wasser und Alkohol ausgewaschen war, wurde es in einem Platintiegel bei gewöhnlicher Temperatur im Exsiccator getrocknet. Das so dargestellte Salz zeigte unter den Canalstrahlen anfangs eine schwach bläuliche Fluorescenz, die aber nach wenigen Augenblicken in rotbraun bez. rotgelb umschlug. Trotzdem das Leuchten mit der Zeit schwächer wurde, blieb die *D*-Linie sichtbar. In Wasserstoff war die Farbe mehr gelblich, auch hier war deutlich die *D*-Linie zu sehen.

Kaliumsalze leuchten anfangs schwach bläulich; nach ganz kurzer Zeit schlägt diese Farbe, falls das Salz etwas

1) W. Arnold, Wied. Ann. 61. p. 326. 1897.

Natrium enthält, was wohl stets der Fall ist, in gelb um, und es tritt die *D*-Linie auf. Cadmiumsulfat, gegläht, leuchtete gelb, Sidot'sche Blende grün, Quecksilber-, Eisen-, Nickel-, Kobalt-, Mangansalze u. a. leuchteten nicht. Ebenso wenig wie durch Kathodenstrahlen habe ich ein intensiv gefärbtes Salz durch Canalstrahlen zum Leuchten bringen können.

Von festen Lösungen leuchteten unter anderen: $\text{ZnSO}_4 + x\text{MnSO}_4$, ¹⁾ rot; $\text{CaSO}_4 + x\text{MnSO}_4$ grün; $\text{MgSO}_4 + x\text{MnSO}_4$ rot; $\text{CdSO}_4 + x\text{MnSO}_4$ gelb; $\text{CaS} + x\text{Cu}_2\text{S}$ bläulich.

Die Farben dieser Salze waren in Wasserstoff identisch mit denen in Sauerstoff, soweit sich das beurteilen liess.

Alle untersuchten Körper verloren unter dem Einfluss der Canalstrahlen schnell die Luminescenzfähigkeit; hierbei wurde ihr Licht weisslicher.

Wegen der grossen Zersetzbarkeit der Salze unter den Canalstrahlen ist es schwer zu beurteilen, inwiefern die Farbe unter den Kathodenstrahlen sich von der unter den Canalstrahlen unterscheidet. $\text{MgSO}_4 + x\text{MnSO}_4$ leuchtete unter den Kathodenstrahlen purpur, unter den Canalstrahlen anfangs rot, eine Farbe, die bald in bläulichrot umschlug. Ebenso leuchtete die unter den Kathodenstrahlen intensiv grün fluorescirende feste Lösung von $\text{CaSO}_4 + x\text{MnSO}_4$ weisslichgrün und war im Spectrum deutlich blau zu erkennen.

Die folgende Tabelle enthält einige Angaben über die beobachteten Spectren; die intensivste Farbe des Fluoreszenz-spectrums ist stets cursiv gedruckt.

Tabelle.²⁾

Substanz	Kathodenspectrum	Canalspectrum
$\text{MgSO}_4 + x\text{MnSO}_4$	rotes Band, etwas gelb	rot, gelb, grün, blau
$\text{ZnSO}_4 + 1 \text{ Proc. MnSO}_4$	rotes Band	rot, gelb, grün, blau
$\text{Na}_2\text{SO}_4 + 1 \text{ Proc. MnSO}_4$	rot, gelb, grün	rot, gelb, grün, blau
$\text{CaCO}_3 + x\text{MnCO}_3$	rot, gelb, grün	rot, gelb, grün, blau
$\text{CaSO}_4 + x\text{MnSO}_4$	rot, gelb, grün, blau	rot, gelb, grün, blau
CdSO_4	rot, gelb, grün, Spur blau	rot, gelb, grün, blau

Die Angaben für die Canalstrahlen sind, wie schon erwähnt, nicht sicher, da die Farben sich schnell infolge der

1) x bedeutet ein kleiner Bruch.

2) E. Wiedemann u. G. C. Schmidt, Wied. Ann. 56. p. 231. 1895.

Zersetzung der Präparate ändern. So habe ich niemals das schwach bläuliche Licht beim Chlornatrium, welches im ersten Augenblick beim Auftreffen der Canalstrahlen erscheint, im Spectroskop beobachten können, sondern nur das rotgelbe.

Aus der Tabelle und aus anderen Beobachtungen lässt sich folgendes Resultat entnehmen:

Während im Kathodenluminescenzspectrum eine Farbe vorherrschend ist, die anderen theils fehlen oder nur schwach ausgebildet sind, ist dies bei den Canalstrahlen nur im ersten Augenblick der Fall; nach kurzer Zeit wird das Fluorescenzlicht weisslicher dadurch, dass alle Farben des Spectrums auftreten.

Von Hrn. W. Wien¹⁾ sind vor kurzem eine Reihe von Fluorescenzerscheinungen unter den Canalstrahlen an Metalloxyden beschrieben worden. Da die auf nassem Wege dargestellten Oxyde nicht leuchten, während die geglühten deutlich diese Erscheinung zeigen, so schliesst er, dass nicht die gewöhnlichen Oxyde als solche unter dem Einfluss der Canalstrahlen fluoresciren, sondern möglicherweise höhere Oxyde, die sich bei der Verbrennung bilden und unter der Bestrahlung bei Abgabe von Sauerstoff in niedere Oxyde verwandeln.

Ich glaube, dass diese Erscheinungen anders erklärt werden müssen. Die reinen Oxyde leuchten, wie aus den Untersuchungen von E. Wiedemann und mir hervorgeht, selbst unter den Kathodenstrahlen nicht oder nur sehr schwach; sobald sie aber eine Spur einer Beimengung enthalten, sobald also eine sogenannte feste Lösung vorliegt, fluoresciren sie in ähnlicher Weise, wie viele gelöste Farbstoffe in Wasser und Alkohol unter dem Einfluss des Lichtes. Mischt man zwei Oxyde oder zwei Salze miteinander, z. B. CaSO_4 mit MnSO_4 , so leuchten sie nicht; sobald man sie aber miteinander glüht, wobei das Mangansalz in das Calciumsalz eindringt oder von dem Calciumsulfat gelöst wird, leuchtet das Mangansulfat intensiv grün. Selbst die reinsten Metalle enthalten Spuren anderer Metalle. Werden dieselben verbrannt, so entstehen feste Lösungen, die zu fluoresciren im stande sind, während beim Darstellen auf nassem Wege im allgemeinen nur inhomogene Gemische sich bilden.

1) W. Wien, Physik. Zeitschr. 3. p. 440. 1902.

Thermoluminescenz. Erwärmt man die mit Canalstrahlen behandelten Salze oder festen Lösungen, so zeigen sie Thermoluminescenz, falls sie unter den Canalstrahlen leuchteten. So thermoluminescirt Chlornatrium bläulich, $\text{CaSO}_4 + x \text{MnSO}_4$ grün, $\text{MgSO}_4 + x \text{MnSO}_4$ rot, $\text{Na}_2\text{SO}_4 + x \text{MnSO}_4$ gelb.

Einwirkung der Canalstrahlen in Sauerstoff. Wie schon Hr. Wehnelt¹⁾ fand, wird Kupfer unter den Canalstrahlen in Luft braun. Dass hierbei thatsächlich ein Oxyd entsteht konnte auf chemischem Wege nachgewiesen werden. Zu dem Zweck wurde das längere Zeit mit Canalstrahlen behandelte Kupferblech mit verdünnter Salzsäure übergossen und darauf mit einem Ueberschuss von Ammoniak versetzt. Die intensiv blaue Färbung zeigte an, dass sich Kupferoxydul gebildet hatte. Als das reine Kupfer in ähnlicher Weise mit Salzsäure und Ammoniak behandelt wurde, ging nichts in Lösung.

Die Thatsache, dass sich Kupferoxydul gebildet hat, kann auf zweierlei Weise erklärt werden, nämlich erstens, dass die Canalstrahlen die Oberfläche stark erhitzt haben oder zweitens, dass die Canalstrahlen den Sauerstoff in Atome spalten, die natürlich viel intensiver wirken, als der moleculare Sauerstoff. Um die erste Annahme zu prüfen, wurde Quecksilberjodid, welches bekanntlich schon bei sehr geringer Temperaturerhöhung aus der roten Modification in die gelbe übergeht, vier Stunden lang den Canalstrahlen ausgesetzt. Nach dieser Zeit war das Salz gebräunt, also zersetzt; eine Umwandlung in die gelbe Modification konnte nicht wahrgenommen werden. Hieraus geht deutlich hervor, dass nicht die Wärmewirkung der Canalstrahlen die Oxydation des Kupfers bewirken kann.

Um die zweite Annahme zu prüfen, wurde auf das Kupferblech ein Bügel von Kupferdraht befestigt, sodass einzelne Stellen vor der directen Einwirkung der Canalstrahlen geschützt waren. Das Blech füllte den Durchmesser des Rohres aus und war zur Erde abgeleitet. Die Oxydation war an allen Stellen die gleiche, ja sogar die untere Seite, wohin keine Canalstrahlen dringen konnten, war oxydirt. Hieraus geht deutlich hervor, dass die Canalstrahlen nur indirect wirken, indem sie den Sauerstoff zersetzen.

1) A. Wehnelt, Wied. Ann. 67. p. 425. 1899.

In ähnlicher Weise werden Cadmium, Aluminium und Zink oxydirt; dagegen war auf den sogenannten edlen Metallen Silber, Gold und Platin nach vier Stunden keine Oxydation wahrzunehmen. Auch dies erklärt sich leicht, wenn wir annehmen, dass die Canalstrahlen den Sauerstoff zersetzen und nur die Atome gegebenenfalls oxydirend wirken. Ebenso wenig wie sich die edlen Metalle an der Luft trotz ihres Gehaltes an oxydirenden Substanzen, wie Ozon, Wasserstoffsuperoxyd (die sich ebenfalls in atomistischen Sauerstoff zersetzen), verändern, ebenso wenig vermag dies der durch die Canalstrahlen gesplattene Sauerstoff. Zu berücksichtigen ist hierbei noch, dass, da das Entladungsrohr vollkommen trocken ist, der atomistische Sauerstoff viel weniger intensiv wirkt, als bei Gegenwart von Wasserdampf.

Aus der Thatsache, dass Canalstrahlen den Sauerstoff zersetzen, erklärt sich auch wohl die Erscheinung, dass das Vacuum schnell schlechter wird.

Von Salzen sind nur wenige vorhanden, welche sich zu einer Prüfung eignen. Bleioxyd wurde in Sauerstoff braun; wahrscheinlich war PbO_2 entstanden; doch war die umgesetzte Menge zu gering, als dass sie der chemischen Untersuchung unterzogen werden konnte. Pb(OH)_2 färbte sich ebenfalls braun. Quecksilberchlorür färbte sich schwarz; wurde also ebenfalls zersetzt, die Bildung von HgOCl konnte nicht nachgewiesen werden.

Einwirkung der Canalstrahlen in Wasserstoff. Quecksilberchlorid. Weisses Quecksilberchlorid wurde während vier Stunden der Einwirkung von Canalstrahlen in Wasserstoff ausgesetzt. Trotzdem es nicht leuchtete, war es dunkler gefärbt. Beim Uebergiessen mit Ammoniak färbte es sich intensiv schwarz; es war also Quecksilberchlorür entstanden. Während aber die Kathodenstrahlen nur die äusserste Oberfläche reduciren, war hier die Einwirkung bis in die tieferen Schichten vorgedrungen.

Auf die Oberfläche des HgCl_2 wurde eine Flussspatplatte derart befestigt, dass die Canalstrahlen nicht direct auftreffen konnten. Nach einiger Zeit war auch hier eine Reduction wahrnehmbar. Diese Thatsache, sowie die, dass auch die tieferen Schichten reducirt sind, erklärt sich einfach, wenn wir

annehmen, dass die Canalstrahlen das Wasserstoffmolecul spalten und die Atome erst reducirend wirken. In Sauerstoff wurde das Quecksilberchlorid nicht reducirt.

Eisenchlorid fluorescirte nicht; in Wasserstoff wurde es ebenso wie das Quecksilberchlorid unter dem Einfluss der Canalstrahlen reducirt, was durch Behandeln mit rotem Blutlaugensalz leicht festgestellt werden konnte. In Sauerstoff konnte keine Veränderung wahrgenommen werden.

Zersetzungen, welche in Sauerstoff und Wasserstoff vor sich gehen. Aus der Thatsache, dass das Luminescenzlicht der meisten Körper unter dem Einfluss der Canalstrahlen bald erblasst, geht deutlich hervor, dass die meisten Substanzen zersetzt werden. Die typischste Reaction, welche hierbei stattfindet, ist die von Hrn. Arnold entdeckte Zersetzung der Natriumsalze. Hierbei tritt stets die *D*-Linie auf, gleichgültig ob der Gasinhalt Wasserstoff oder Sauerstoff ist.

Diese Reaction ist so empfindlich, dass viele Körper, welche nur spurenweise Natriumsalze enthalten, trotzdem die *D*-Linie zeigen. In Kaliumsalzen, Kalkspat, Feldspat etc. habe ich sie häufig wahrgenommen. Auch hier wirken also die Canalstrahlen zersetzend.

Dass das Fluorescenzlicht je nach dem Gasinhalt häufig verschieden ist, wie Hr. Wien beobachtet hat, lässt sich für alle Körper, welche Natrium enthalten, nach den vorhergehenden Beobachtungen leicht erklären. Ist die Röhre mit Wasserstoff gefüllt, so wird die Substanz unter Leuchterscheinungen zersetzt; ist dagegen Sauerstoff vorhanden, so wird neben den die Zersetzung begleitenden Leuchterscheinungen noch ein Leuchten infolge der Oxydation des Natriums eintreten. Dass das Luminescenzlicht in beiden Fällen verschieden ist, liegt auf der Hand. Wahrscheinlich erklärt sich die Thatsache, dass das Luminescenzlicht je nach dem Gasinhalt auch bei anderen Körpern, welche kein Natrium enthalten, verschieden ist, ganz analog.

Resultate.

1. Die unter den Kathodenstrahlen intensiv leuchtenden festen Lösungen leuchten auch unter den Canalstrahlen. Die Intensität des Luminescenzlichtes nimmt jedoch infolge Zersetzung der Substanz schnell ab.

2. Während im Kathodenluminescenzspectrum eine Farbe vorherrschend ist, die anderen theils fehlen oder nur schwach ausgebildet sind, ist dies bei den Canalstrahlen nur im ersten Augenblick der Fall. Nach kurzer Zeit wird das Fluorescenzlicht weisslicher dadurch, dass alle Farben des Spectrums auftreten.

3. Canalstrahlen wirken stets zersetzend und zwar zersetzen sie sowohl das Gas, als auch die bestrahlte Substanz.

4. Ist der Gasinhalt Sauerstoff, so wird dieser gespalten; befindet sich in der Röhre ein oxydabler Körper, so wird derselbe durch den atomistischen Sauerstoff oxydirt. Die Canalstrahlen wirken in diesem Fall scheinbar oxydirend.

5. Ist der Gasinhalt Wasserstoff, so wird derselbe ebenfalls zersetzt. Befindet sich im Rohr eine reducirbare Verbindung, so wird dieselbe durch den atomistischen Wasserstoff reducirt. Die Canalstrahlen wirken in diesem Fall scheinbar reducirend.

6. Die typischste Reaction für die Canalstrahlen ist die von Hrn. Arnold entdeckte Zersetzung der Natriumsalze. Hierbei tritt hell die D-Linie auf.

Erlangen, Physik. Institut, 1. August 1902.

(Eingegangen 5. August 1902.)

**15. Zur ballistischen Methode
der Messung von Elektrizitätsmengen;
von H. Diesselhorst.**

Bei den meisten Anwendungen, welche das ballistische Galvanometer zur Messung von Elektrizitätsmengen findet, ist die Annahme gestattet, dass die Zeitdauer des elektrischen Vorganges gegen die des mechanischen verschwindet. Wenn dies eintritt, oder genauer, wenn die Elektrizitätsmenge völlig abgelaufen ist, noch ehe eine merkliche Verschiebung des beweglichen Systems stattgefunden hat, so erhält das letztere eine Anfangsgeschwindigkeit, die der Elektrizitätsmenge proportional ist. Wenn aber die obige Voraussetzung nicht gilt, so ist die Bewegung abhängig von der Zeitdauer und Form des durch das Galvanometer fließenden elektrischen Stromes.

Für diese Abhängigkeit sind von Dorn¹⁾ allgemeine Formeln aufgestellt, in denen auch auf die Rechtzeitigkeit der Stromstöße bei der Multiplications- und Zurückwerfungs-methode Rücksicht genommen wird.

Zur Zeit 0 gehe das Galvanometersystem mit der Geschwindigkeit v durch die Ruhelage. J_0 sei der Strom, der von der Zeit ϑ bis $\vartheta + \tau$ andauert, sodass

$$Q = \int_{\vartheta}^{\vartheta + \tau} J_0 dt$$

die Elektrizitätsmenge darstellt. Ferner sei K Trägheitsmoment, p Dämpfungsmoment, D Directionskraft des Galvanometers und q dynamische Galvanometerconstante (Product aus Feldstärke und Windungsfläche). A sei der durch v und die Wirkung von J_0 hervorgebrachte ballistische Ausschlag und V diejenige Anfangsgeschwindigkeit, welche den gleichen Ausschlag ohne Mitwirkung des Stromstoßes hervorgebracht haben würde. A_0 und V_0 seien die entsprechenden Grössen bei

1) E. Dorn, Wied. Ann. 17. p. 654. 1882.

momentanem und rechtzeitigem Durchgang der gleichen Elektrizitätsmenge. Die Ausschläge A und A_0 verhalten sich wie die Geschwindigkeiten V und V_0 . Setzt man dann zur Abkürzung

$$\alpha = \frac{p}{2K}, \quad \varrho^2 = \frac{4KD - p^2}{4K^2},$$

$$c = \frac{1}{Q} \int_{\phi}^{\phi+\tau} J_{\phi} e^{\alpha t} \cos \varrho t \, dt, \quad s = \frac{1}{Q} \int_{\phi}^{\phi+\tau} J_{\phi} e^{\alpha t} \sin \varrho t \, dt,$$

und endlich

$$\eta = \frac{Kv}{qQ},$$

so ist nach Dorn

$$(1) \quad \frac{A}{A_0} = \frac{V}{V_0} = \frac{1}{1+\eta} \sqrt{(c+\eta)^2 + s^2} \cdot e^{-\frac{\alpha}{\varrho} \operatorname{arctg} \frac{s}{c+\eta}}.$$

Für den Fall momentaner Inductionsstösse ($\tau = 0$) und für den Fall eines inducirten Sinusstromes, wie er bei der Anwendung des Erdinductors entsteht, ist die Formel von Dorn weiter entwickelt und in eine Reihe nach Potenzen von ϑ und τ geordnet. Dabei zeigt sich, dass in beiden Fällen die Glieder erster Ordnung verschwinden. Auf diesem Umstand beruht es, dass ziemlich grobe Versehen in der Rechtzeitigkeit und relativ langsame Umdrehung des Erdinductors den ballistischen Ausschlag nur wenig fehlerhaft machen.¹⁾

Es schien mir der Mühe wert, zu untersuchen, ob dies für die messende Physik so wichtige Resultat allgemeine Gültigkeit besitzt, oder an die specielle Stromform gebunden ist. Es zeigte sich die Allgemeingültigkeit des Dorn'schen Resultates. Zugleich ergab sich der Einfluss, den die Constanten des Galvanometers auf die Fehlergrösse haben, gesondert von dem Einfluss der Stromform.

Um den Nachweis zu führen, wollen wir zunächst auf directem Wege die Dorn'sche Formel in anderer Gestalt her-

1) Nach mündlicher Mitteilung ist in dem Zahlenbeispiel, welches Dorn auf die ältere Ohmbestimmung von Kohlrausch anwendet, die Umdrehungsdauer des Inductors etwa um das Doppelte zu gross angenommen, ihr Einfluss auf das Resultat also etwa viermal zu gross geschätzt.

leiten. Unter Benutzung der bereits oben eingeführten Bezeichnungen erhalten wir für die Bewegung des Galvanometersystems, d. h. für den Ausschlagswinkel x zur Zeit t , die Differentialgleichung

$$(2) \quad K \frac{d^2 x}{dt^2} + p \frac{dx}{dt} + D x = q J_0.$$

Wenn $\vartheta > 0$ ist, d. h. wenn der Stromstoss erst nach dem Durchgang durch die Ruhelage beginnt, lautet die Anfangsbedingung

$$(2a) \quad \text{für } t = 0 \text{ ist } x = 0 \text{ und } \frac{dx}{dt} = v.$$

Wenn wir auch negative ϑ einbegreifen, können wir die Anfangsbedingung so aussprechen:

Vor dem Beginn des Stromstosses, also für $t < \vartheta$, soll die Bewegung derart sein, dass bei Fortsetzung derselben ohne Hinzukommen des Stromstosses die obige Bedingung (2a) erfüllt ist.

Man erkennt leicht, dass dieser Bedingung und der Gleichung (2) die Lösung genügt

$$x = \frac{e^{\mu t} - e^{\nu t}}{\mu - \nu} v + \frac{q}{K(\mu - \nu)} \left\{ e^{\mu t} \int_{\vartheta}^t J_0 e^{-\mu t} dt - e^{\nu t} \int_{\vartheta}^t J_0 e^{-\nu t} dt \right\},$$

deren erster Teil die Bewegung darstellt, wie sie ohne Hinzukommen des Stromstosses verlaufen würde. μ und ν sind die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$K\mu^2 + p\mu + D = 0.$$

Die Wurzeln sind entweder reell (aperiodischer Zustand des Galvanometers), oder conjugirt complex (periodischer Zustand). Im letzteren Falle nimmt die Lösung die Form an

$$\frac{F(a + bi) - F(a - bi)}{i}$$

und bleibt daher stets reell.

Wenn wir uns auf die Zeit beschränken, wo der Stromstoss bereits abgelaufen ist, d. h. wenn wir $t > \vartheta + \tau$ nehmen, so können wir in den bestimmten Integralen der Lösung als obere Grenze anstatt t einsetzen $\vartheta + \tau$, weil jenseits dieser

Grenze $J_\vartheta = 0$ ist. Die Integrale werden dann constant und wir setzen zur Abkürzung

$$(3) \quad \int_{\vartheta}^{\vartheta+\tau} J_{\vartheta} e^{-\mu t} dt = MQ \quad \text{und} \quad \int_{\vartheta}^{\vartheta+\tau} J_{\vartheta} e^{-\nu t} dt = NQ.$$

Q bedeutet die Elektrizitätsmenge

$$Q = \int_{\vartheta}^{\vartheta+\tau} J_{\vartheta} dt.$$

Danach nimmt die Lösung für $t > \vartheta + \tau$ die Form an

$$(4) \quad x = \frac{qQ}{K(\mu - \nu)} \{ (M + \eta) e^{\mu t} - (N + \eta) e^{\nu t} \}.$$

Darin ist, wie früher, zur Abkürzung

$$(5) \quad \eta = \frac{K\tau}{qQ}$$

gesetzt.

Bildet man dx/dt , berechnet aus der Gleichung $dx/dt = 0$ die Umkehrzeit und setzt sie in den Ausdruck für x ein, so erhält man den ballistischen Ausschlag

$$(6) \quad A = C \cdot (M + \eta)^{\frac{\nu}{\nu - \mu}} \cdot (N + \eta)^{\frac{\mu}{\mu - \nu}}.$$

C stellt einen Factor dar, der von M und N , d. h. von ϑ und τ unabhängig ist. Im Grenzfall $\vartheta = \tau = 0$, während die Elektrizitätsmenge Q constant bleibt, wird $M = N = 1$. Durch Einsetzen dieser Werte in (6) erhält man den Ausschlag A_0 und es ergibt sich für das Verhältnis des fehlerhaften zum idealen Ausschlag der Wert

$$(7) \quad \frac{A}{A_0} = \left(\frac{M + \eta}{1 + \eta} \right)^{\frac{\nu}{\nu - \mu}} \left(\frac{N + \eta}{1 + \eta} \right)^{\frac{\mu}{\mu - \nu}}.$$

Wenn μ und ν imaginär sind, bleibt der Ausdruck reell und lässt sich durch Umformung in die Dorn'sche Formel (1) verwandeln, indem man setzt

$$\mu + \nu = -2\alpha \quad \text{und} \quad \mu\nu = \varrho^2 + \alpha^2.$$

Wir wollen jetzt den Ausdruck für A/A_0 aus der Form (7), die leichter zu behandeln ist, als die Dorn'sche Form (1), in eine Reihe nach Potenzen von ϑ und τ entwickeln und dann zeigen, dass die Glieder erster Ordnung verschwinden. In den

Coefficienten der Reihe werden die Wurzeln μ und ν nur in den stets reellen symmetrischen Verbindungen

$$\mu + \nu = -\frac{p}{K} \quad \text{und} \quad \mu \nu = \frac{D}{K} \quad (10)$$

vorkommen, sodass das Resultat ohne weitere Umformung sowohl für den periodischen als den aperiodischen Zustand des Galvanometers brauchbar ist.

Die beiden Factoren auf der rechten Seite der Formel (7) gehen durch Vertauschen von μ und ν ineinander über. Wir betrachten daher nur den ersten und fassen speciell den in (3) gegebenen Ausdruck für M ins Auge.

Der Strom J_ϕ hängt nur insofern von der Verzögerung ϕ ab, als er zur Zeit $t = \phi$ beginnt. Die Form des weiteren Verlaufes ist unabhängig von ϕ , d. h. J_ϕ ist eine Function von $t - \phi$. Bezeichnet J dieselbe Function mit dem Argument t , so stellt J die eigentliche Stromform, von der Zeit 0 bis τ gerechnet, dar

$$\left(\text{z. B. } J_\phi = \sin \frac{\pi(t - \phi)}{\tau}, \quad J = \sin \frac{\pi t}{\tau} \right).$$

Jetzt führen wir in die Integrale (3) an Stelle von t die Integrationsvariable $z = t - \phi$ ein und bezeichnen nachher den Integrationsbuchstaben z wieder mit t . Dann erhalten wir für M den Ausdruck

$$M = \frac{\int_0^\tau J e^{-\mu(t + \phi)} dt}{\int_0^\tau J dt}$$

oder

$$(8) \quad M = M_0 \cdot e^{-\mu \phi},$$

wenn

$$M_0 = \frac{\int_0^\tau J e^{-\mu t} dt}{\int_0^\tau J dt}$$

gesetzt wird. Dadurch ist der Einfluss der Verzögerung ϕ abgesondert von dem Einfluss, welchen die Stromform ausübt.

Wir betrachten nun weiter den Ausdruck für M_0 . Da die obere Grenze τ der hier vorkommenden Integrale klein ist, t also während der Integration nur kleine Werte annimmt, so liegt es nahe, die Exponentialfunction $e^{-\mu t}$ durch ihre Reihe

$$e^{-\mu t} = 1 - \mu t + \frac{1}{2} \mu^2 t^2 \dots$$

zu ersetzen. Dann treten folgende neuen Integrale auf

$$(9) \quad \Phi_1 = \frac{\int_0^\tau t J dt}{\int_0^\tau J dt}, \quad \Phi_2 = \frac{\int_0^\tau t^2 J dt}{\int_0^\tau J dt} \dots$$

und man erhält

$$(10) \quad M_0 = 1 - \mu \Phi_1 + \frac{1}{2} \mu^2 \Phi_2 \dots$$

Die Integrale Φ sind von den Constanten des Galvanometers unabhängig und allein durch die Form des Stromes J bestimmt. Ferner werden alle Integrale Φ_n mit τ unendlich klein und zwar von der Ordnung, welche der Index von Φ anzeigt. Wir erhalten also die Entwicklung nach Potenzen von ϑ und τ , wenn wir eine solche nach ϑ und den Functionen Φ vornehmen. Die letztere bietet keine Schwierigkeit. Man erhält zunächst aus (8) und (10)

$$M = M_0 e^{-\mu \vartheta} = 1 - \mu (\vartheta + \Phi_1) + \frac{1}{2} \mu^2 (\vartheta^2 + 2 \vartheta \Phi_1 + \Phi_2) + \dots$$

Anstatt der durch (5) definirten Grösse η führen wir jetzt bequemer

$$(11) \quad \omega = \frac{\eta}{1 + \eta} = \frac{K v}{K v + q Q}$$

ein. Den Ausdruck $(M + \eta)/(1 + \eta)$, der für kleine ϑ und τ nahe gleich 1 wird, schreiben wir in der Form

$$\frac{M + \eta}{1 + \eta} = 1 + (1 - \omega)(M - 1),$$

oder nach der obigen Entwicklung von M

$$\frac{M + \eta}{1 + \eta} = 1 + (1 - \omega) [-\mu (\vartheta + \Phi_1) + \frac{1}{2} \mu^2 (\vartheta^2 + 2 \vartheta \Phi_1 + \Phi_2) + \dots],$$

und analog durch Vertauschen von μ und ν

$$\frac{N + \eta}{1 + \eta} = 1 + (1 - \omega) [-\nu (\vartheta + \Phi_1) + \frac{1}{2} \nu^2 (\vartheta^2 + 2 \vartheta \Phi_1 + \Phi_2) + \dots].$$

Hieraus ergibt sich gemäss der Formel (7) entweder direct nach dem binomischen Lehrsatz, oder bequemer durch Logarithmiren und Reihenentwicklung die gesuchte Darstellung. Wir beschränken uns auf Glieder zweiter Ordnung, da die höheren ohne allgemeines Interesse sind, und erhalten

$$\frac{A}{A_0} = 1 - \frac{1}{2} \mu \nu (1 - \omega) [(\Phi_2 - \Phi_1^2) + \omega (\vartheta + \Phi_1)^2].$$

Die Glieder erster Ordnung sind fortgefallen. Nun ist $\mu \nu = D/K$ oder, ausgedrückt durch die Schwingungsdauer T_0 des ungedämpften Systems, $\mu \nu = \pi^2/T_0^2$. Danach erhalten wir endlich für den relativen Fehler des ballistischen Ausschlages den Wert

$$(12) \quad \frac{A - A_0}{A_0} = - \frac{\pi^2(1 - \omega)}{2 T_0^2} [(\Phi_2 - \Phi_1^2) + \omega (\vartheta + \Phi_1)^2],$$

wo Φ_1 und Φ_2 durch die Formeln (9) und ω durch (11) definiert ist. Um für ω einen anderen Ausdruck zu gewinnen, nehmen wir für einen Augenblick an, die Elektrizitätsmenge $Q = \int J dt$ flosse momentan, d. h. ehe x einen merklichen Wert erlangt. Für die von dem vorangehenden Ausschlage herrührende Anfangsgeschwindigkeit v haben wir dann einen etwas anderen Wert v_0 zu setzen; und durch den Stromstoss wird dieser auf V_0 erhöht. Für den Geschwindigkeitszuwachs $V_0 - v_0$ ergibt sich in bekannter Weise durch Multiplication der Differentialgleichung (2) mit dt und Integration über das kleine Zeitintervall des Stromstosses die Beziehung

$$K(V_0 - v_0) = q Q.$$

Setzt man dies in (11) ein, so kommt

$$\omega = \frac{v}{v + V_0 - v_0},$$

oder, da wir uns auf Grössen zweiter Ordnung beschränken also in dem Fehlergliede $v = v_0$ setzen dürfen,

$$\omega = \frac{v_0}{V_0}.$$

Hiernach kann man, wie das auch Dorn thut, ω durch das Dämpfungsverhältnis k ausdrücken und zwar bei den verschiedenen Methoden in verschiedener Weise. Man erhält

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{bei einmaligem Stromstoss} & \omega = 0, \\ \text{bei Multiplication} & \omega = \frac{1}{k}, \\ \text{bei Zurückwerfung} & \omega = -\frac{1}{k^2}. \end{array} \right.$$

Die Formel (12) lässt sich noch etwas anders schreiben, insofern Φ_1 von erster, Φ_2 von zweiter Ordnung in Bezug auf τ ist. Wir können daher setzen

$$(14) \quad \Phi_1 = \varepsilon \tau, \quad (\Phi_2 - \Phi_1^2) = a \tau^2,$$

wo a und ε zwei Zahlen sind, die von der Stromform abhängen. Danach wird

$$(15) \quad \frac{A - A_0}{A_0} = -\frac{\pi^2}{2 T_0^2} (1 - \omega) (a \tau^2 + \omega (\vartheta + \varepsilon \tau)^2).$$

Man hat es in der Hand, die Verzögerung ϑ nicht als unbeabsichtigten Fehler aufzufassen, sondern durch sie einen bestimmten Anfangsmoment des Stromstosses festzulegen. Man kann dann ϑ so wählen, dass das zweite Glied der Klammer verschwindet, d. h. dass $\vartheta + \varepsilon \tau = 0$ wird. Die Zeit

$$\vartheta_0 = -\varepsilon \tau = -\Phi_1,$$

gerechnet von dem Augenblick, in welchem das Galvanometersystem durch die Ruhelage geht, wählt man also zweckmässig zum Beginn des Stromstosses. Verspätet man denselben um den Betrag z gegen diesen Zeitpunkt, so wird $\vartheta = -\varepsilon \tau + z$ und die Formel (15) geht über in

$$(16) \quad \frac{A - A_0}{A_0} = -\frac{\pi^2}{2 T_0^2} (1 - \omega) (a \tau^2 + \omega z^2).$$

Ein positives und ein negatives z , d. h. eine Verspätung und eine Verfrühung von gleichem Betrage gegen den Anfangsmoment ϑ_0 bringen die gleiche Wirkung hervor.

Ueber die Zahlenwerte a und ε lassen sich einige allgemeine Angaben machen. Sie hängen zunächst nur von der Form des Stromes, nicht von seiner absoluten Stärke ab,

d. h. sie bleiben ungeändert, wenn man die Stromstärke mit einem constanten Factor multiplicirt. Dies geht daraus hervor, dass nach der Definition (9) das Gleiche für die Functionen Φ gilt.

Hieraus lässt sich sogleich die Folgerung ziehen, dass der relative Fehler unabhängig ist von der absoluten Grösse des Ausschlags. Wenn es also nur auf das Verhältniss zweier mit verschiedener Stromstärke (Elektricitätsmenge), aber gleicher Stromform und Stromdauer erhaltenen Ausschläge ankommt, wie z. B. bei der Bestimmung der Inclination mit dem Erdinductor, so fällt der von der Stromdauer τ herrührende erste Teil des Fehlers heraus. Der ganze Fehler fällt fort, wenn ausserdem der Stromstoss in jeder Periode zur gleichen, aber sonst beliebigen Zeit ϑ beginnt. Um den Einfluss unvermeidlicher Unrechtzeitigkeiten möglichst gering zu machen, wird man aber auch dann die günstige Zeit $\vartheta_0 = -\varepsilon\tau$ zum Beginn des Stromstosses wählen.

Wenn ferner J während des Stromstosses das Vorzeichen nicht wechselt, lässt sich zeigen, dass ε zwischen 0 und 1 und α zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ liegt. Für ε folgt die Behauptung nach der Definition (14) ohne weiteres aus dem in (9) gegebenen Wert von Φ_1 durch Anwendung des Mittelwertsatzes auf das im Zähler stehende Integral. Man lässt den Factor J unter dem Integralzeichen und setzt einen bestimmten mittleren Wert $\varepsilon\tau$ des anderen Factors t vor das Integral. So kommt

$$\int_0^{\tau} t J dt = \varepsilon\tau \int_0^{\tau} J dt$$

und daher

$$\Phi_1 = \varepsilon\tau.$$

Behandeln wir ebenso das Integral in Φ_2 und setzen

$$\int_0^{\tau} t^2 J dt = \int_0^{\tau} t \cdot t J dt = \varepsilon'\tau \int_0^{\tau} t J dt = \varepsilon'\varepsilon\tau^2 \int_0^{\tau} J dt,$$

also

$$\Phi_2 = \varepsilon'\varepsilon\tau^2,$$

so liegt auch ε' zwischen 0 und 1. Man erkennt aber auch, dass $\varepsilon' > \varepsilon$ sein muss, weil bei dem Ausdruck $t J dt$ die nach

der oberen Grenze des Integrales zu liegenden Werte relativ mehr Gewicht haben, als bei dem Ausdruck $J dt$, und weil deswegen der vor das Integral tretende Wert des anderen Factors $t = \varepsilon' \tau$ näher an der oberen Grenze liegen muss als $\varepsilon \tau$. Für den Ausdruck $a = \varepsilon(\varepsilon' - \varepsilon)$ ergibt sich also die Bedingung

$$0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon' \leq 1$$

und daraus folgt weiter

$$0 \leq a \leq \frac{1}{4}.$$

Der obere Grenzwert $a = \frac{1}{4}$ wird erreicht für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ und $\varepsilon' = 1$. Dies trifft thatsächlich ein, wenn der Strom J aus zwei gleichgrossen, durch das Zeitintervall τ getrennten momentanen Stromstössen besteht. Die untere Grenze $a = 0$ wird nur für $\tau = 0$, d. h. einen einzigen momentanen Stromstoss erreicht.

Man kann den Ausdruck $\Phi_2 - \Phi_1^2$, aus welchem a berechnet wird, als Doppelintegral darstellen in der Form

$$\Phi_2 - \Phi_1^2 = \frac{1}{2 Q^2} \int_0^\tau \int_0^\tau J_t J_z (t - z)^2 dt dz,$$

wo J_t und J_z die Stromfunction J mit dem Argument t bez. z bedeuten und Q die Elektrizitätsmenge ist. Aus dieser Form ist ebenfalls ersichtlich, dass $\Phi_2 - \Phi_1^2$ und damit a stets positiv, also $\varepsilon' > \varepsilon$ ist, wenn J während des Stromstosses die Richtung nicht wechselt.

Wenn die Stromcurve J symmetrisch zur Mitte des Intervalls τ liegt, so ist stets $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Denn durch Einführung der Symmetriebedingung $J(t) = J(\tau - t)$ ergibt sich aus (9)

$$\Phi_1 = \frac{1}{2} \tau.$$

Bei allen symmetrischen Stromcurven liegt also der günstige Anfangsmoment $\vartheta_0 = -\Phi_1$, durch welchen der Fehler des Ausschlages auf das erste Glied

$$\frac{A - A_0}{A_0} = - \frac{\pi^2}{2 T_0^2} (1 - \omega) a \tau^{\frac{1}{2}}$$

reducirt wird, so, dass die Ruhelage des Galvanometersystems in der Mitte des Intervalls τ passiert wird.

Zum Schluss mögen einige specielle Fälle behandelt und die Werte der Functionen Φ_1 und Φ_2 bez. der Zahlen a und ε für gegebene Stromformen berechnet werden.

1. *Momentane Stromstösse.* Für $\tau = 0$ erhält man aus der allgemeinen Formel (12) den auch von Dorn hergeleiteten Ausdruck

$$\left(\frac{A - A_0}{A_0}\right)_{\tau=0} = -\frac{\pi^2}{2 T_0^2} \omega (1 - \omega) \tau^2.$$

Für ω gelten je nach der angewandten Methode die Werte (13). Bei der Multiplication ist der Fehler stets negativ, d. h. durch eine Verfrühung oder Verspätung eines Stromstosses wird der nachfolgende Ausschlag stets zu klein. Bei der Zurückwerfung ist der Fehler immer positiv, also der Ausschlag zu gross.

2. *Einmaliger Stromstoss von der Zeitdauer τ .* Man setzt $\omega = 0$ in die Formel (12) oder (15) und erhält

$$\left(\frac{A - A_0}{A_0}\right)_{\omega=0} = -\frac{\pi^2}{2 T_0^2} (\Phi_2 - \Phi_1) = -\frac{a \pi^2}{2} \frac{\tau^2}{T_0^2}.$$

Der Fehler ist unabhängig von der Dämpfung des Galvanometers. Wenn der Strom die Richtung nicht wechselt, ist $0 \leq a \leq \frac{1}{4}$, der Ausschlag also zu klein.

3. *Sinusstrom. (Erdinductor.)* $J = J_0 \sin \frac{\pi t}{\tau}$. Man findet

$$\Phi_1 = \frac{1}{2} \tau, \quad \Phi_2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right) \tau^2$$

und daraus

$$\varepsilon = \frac{1}{2}, \quad a = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} = 0,04736$$

und endlich durch Einsetzen dieser Werte in (16)

$$\frac{A - A_0}{A_0} = -0,2337 (1 - \omega) \frac{\tau^2}{T_0^2} - 4,935 \cdot \omega (1 - \omega) \frac{\tau^2}{T_0^2}$$

(z gleich Verzögerung gegen den Anfangsmoment $\vartheta_0 = -\frac{1}{2} \tau$). Auch diese Formel ist von Dorn angegeben.

4. *Constanter Strom J_0 von der Zeitdauer τ .* Es wird

$$\varepsilon = \frac{1}{2}, \quad a = \frac{1}{12}.$$

Für Stromcurven, welche kein Minimum besitzen, liegt a zwischen 0 und $\frac{1}{12}$.

5. *Gedämpfter Strom. (Inductionsspule.)* $J = J_0 e^{-t/\tau_0}$ Die eigentliche Stromdauer ist unendlich. Doch kommen nur solche Fälle in Betracht, bei denen der Strom bis auf einen verschwindenden Rest abgelaufen ist, bevor die Umkehr des Galvanometers eintritt. In den Integralen (9) ist es dann einerlei, ob wir bis zu einer willkürlichen, hinreichend grossen Grenze τ oder bis ∞ integrieren. Thun wir das letztere, so werden Φ_1 und Φ_2 Functionen von τ_0 allein und wir erhalten

$$\Phi_1 = \tau_0, \quad \Phi_2 = 2\tau_0^2,$$

also

$$\Phi_2 - \Phi_1^2 = \tau_0^2.$$

(Eingegangen 7. August 1902.)

16. *Eine Fehlerquelle bei magnetometrischen Messungen; von Th. Erhard.*

Bei Anwendung der magnetometrischen Methode auf die magnetische Untersuchung von Eisensorten pflegt man die Wirkung der Magnetisirungsspule auf das Magnetometer durch eine Compensationsspule aufzuheben. Man verfährt gewöhnlich so, dass man, erste Hauptlage angenommen, diese Compensationsspule conaxial mit der Magnetisirungsspule auf der anderen Seite des Magnetometers aufstellt, durch beide Spulen denselben Strom so hindurch führt, dass das Magnetometer von jeder Spule entgegengesetzt abgelenkt wird, wie von der anderen, und die Compensationsspule so lange in ihrer Axenrichtung verschiebt, bis das Magnetometer wieder seine Anfangslage im magnetischen Meridian erreicht hat. Wird dann der zu untersuchende Eisenkörper in die Magnetisirungsspule eingeführt, so rührt die Ablenkung des Magnetometers bei jeder Stromstärke nur vom Magnetismus des Eisens her, der Strom in den Spulen lenkt nicht ab.

Man macht hierbei nun gewöhnlich die Annahme, dass durch diese Compensation die directe Wirkung des Magnetisirungsstromes auf das Magnetometer in jeder Beziehung beseitigt sei. Dies ist jedoch im allgemeinen nicht der Fall, vielmehr wird bei der beschriebenen Aufstellung der beiden Spulen nur die *Ablenkungswirkung* des Feldes der Magnetisirungsspule beseitigt, d. h. die senkrecht zum magnetischen Meridian stehenden Componenten der Feldkräfte beider Spulen heben sich auf. Dass auch etwaige im magnetischen Meridian liegende Componenten der Kräfte beider Spulenfelder sich am Ort des Magnetometers aufheben, darf aber nicht ohne weiteres angenommen werden, vielmehr muss dies erst besonders nachgewiesen, oder der Betrag der etwa vorhandenen Störung,

d. h. die durch diese Spulenkräfte verursachte Verstärkung oder Abschwächung des Erdfeldes, bestimmt werden. Nach allen mir bekannten Beschreibungen der magnetometrischen Messungen ist etwas dieser Art bisher in der Regel nicht geschehen, es dürften daher manche so ausgeführte Messungen mit einem Fehler behaftet sein, der zwar bei schwächeren Feldern (und diese sind die wichtigsten) nur gering sein wird, bei starken aber leicht einige Procent betragen kann.

Bei einer derartigen Messungsreihe fand ich z. B., dass bei einer Feldstärke von 0,92 im Innern der Magnetisirungsspule das Erdfeld am Orte des Magnetometers um 0,024 Proc., bei der Feldstärke 3,04 um 0,080 Proc., endlich bei der Feldstärke 128,3 um 3,4 Proc. verstärkt war. Bei Messungen mit sehr starken Feldern stieg die Feldänderung, die in diesem Falle in einer Abschwächung bestand, sogar auf 8 Proc. der ursprünglichen Stärke des Erdfeldes.

Die Prüfung darauf, ob, z. B. durch eine Lage der Axe der Compensationsspule nicht genau senkrecht zum magnetischen Meridian, solche störende Kraftcomponenten vorhanden sind, geschieht sehr einfach dadurch, dass man, nachdem die Compensationsspule in der angegebenen Art eingestellt ist, eine passende, stets gleichgrosse ablenkende Kraft auf das Magnetometer wirken lässt, einmal, wenn die beiden Spulen stromfrei sind, das andere Mal, wenn ein bekannter Strom in ihnen fliesst. Ist die Ablenkung beide Male gleich, so sind auch die im magnetischen Meridian liegenden Spulenkräfte compensirt, das Erdfeld ist unverändert. Sind die Ablenkungen verschieden, so kann man entweder durch eine geringe Drehung der Compensationsspule um eine verticale Axe den Fehler beseitigen, oder die Grösse der Feldänderung aus der Grösse der Ausschläge bestimmen.

Da diese Feldänderung bei verschiedenen Strömen einfach proportional der Stromstärke ist, so genügt natürlich die Prüfung der Feldänderung mit nur einer Stärke des Magnetisirungsstromes, und es ist leicht, den Einfluss der Störung bei der Berechnung der Messresultate zu berücksichtigen. Dieser letztere Weg wird in vielen Fällen deshalb der bequemere sein, da gewöhnlich die Compensationsspule nur in

der Richtung senkrecht zum magnetischen Meridian verschiebbar, aber selten bequem drehbar ist.

Die für diese Feldprüfung nötige, stets gleichgrosse ablenkende Kraft wird am besten dadurch erlangt, dass man als Magnetometer ein einfaches Spiegelgalvanometer benutzt und durch seine Windungen einen passenden Strom von jedesmal gleicher Stärke schickt. Die Prüfung der Feldänderung ist dann äusserst einfach und sehr rasch auszuführen.

Freiberg, Bergakademie, August 1902.

(Eingegangen 19. August 1902.)

17. *Berichtigung; von O. Lehmann.*

In der Abhandlung „Künstlicher Dichroismus bei flüssigen Krystallen etc.“ Bd. 8, p. 914, Anm. 3 findet sich der Satz: „Solange die Elasticitätsgrenze nicht überschritten wird, tritt innere Reibung nicht auf, denn durch elastische Deformation entsteht lediglich Spannungsenergie.“ Derselbe sollte lauten: „Solange die Elasticitätsgrenze nicht überschritten wird, tritt innere Reibung im allgemeinen nicht in erheblichem Maasse auf, denn durch elastische Deformation entsteht lediglich Spannungsenergie, abgesehen von dem durch die elastische Nachwirkung (elastische Hysteresis) bedingten Arbeitsverlust.“ Als Ergänzung obiger Anmerkung sei noch beigelegt, dass unveröffentlichte Beobachtungen, welche ich vor 12 Jahren über die Elasticität von Schellack- und Guttaperchastäben in der Nähe der Uebergangstemperatur in den flüssigen Zustand (für welchen die Elasticitätsgrenze gleich Null ist) anstellte, wie zu erwarten, das Ergebnis hatten, dass *in der Nähe dieser Temperatur das Verhältnis der inneren Reibung zur Elasticität rapid zunimmt*, sodass die Nachwirkungserscheinungen sehr auffällig hervortreten. Beim Uebergangspunkt verschwindet die Elasticität, es bleibt nur die innere Reibung. Elasticität ist dabei, wie üblich, in dem Sinne vollkommener Elasticität zu verstehen, d. h. dass die deformirende Kraft wie bei einer gespannten Feder *dauernd* zu wirken vermag ohne *bleibende* Deformation hervorzurufen. In diesem Sinne ist die Elasticitätsgrenze der Flüssigkeiten gleich Null, denn sie vermögen dauernd auch nicht die kleinste Kraft zu ertragen, ohne nachzugeben. Für *vorübergehende rasche Deformationen*, z. B. Schwingungen, können sich bekanntlich auch Flüssigkeiten ähnlich wie elastische Körper verhalten, d. h. Deformationen erleiden, welche nach Aufhören der Kraft nahezu zurückgehen, sodass sie wenigstens annähernd ihre frühere Gestalt (Structur) wieder annehmen. Die ältere Undulationstheorie des Lichtes nahm

eine solche Elasticität selbst für den Aether an, um die Existenz transversaler Wellen in demselben zu erklären. Zu den durch die elastische Nachwirkung (innere Reibung) bedingten Wärmeerscheinungen gesellen sich im allgemeinen noch Compressionswärme und Dilatationskälte. Diese hängen nicht mit der inneren Reibung, sondern mit den Volumenänderungen zusammen, welche mit elastischen Deformationen (einfachen Schiebungen) nicht notwendig verbunden sein müssen. Zur Definition der Elasticität eines Körpers benutze ich deshalb nicht den gewöhnlichen Elasticitätsmodul, sondern den Schub-(Gleit-)Modul, welcher im Gegensatz zu ersteren auch als der zweite Elasticitätsmodul bezeichnet wird.

(Eingegangen 13. August 1902.)

